

PC  
Physique · Modélisation · Chimie  
2017

Sous la coordination de

Julien DUMONT  
professeur en CPGE  
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Alexandre HERAULT  
professeur en CPGE  
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Virgile ANDREANI  
ENS Ulm

Claire BESSON  
docteur en chimie

Vincent FREULON  
professeur en CPGE

Raphaël GALICHER  
enseignant-chercheur à l'université

Margaux GALLAND  
ENS Lyon

Alexandre HERAULT  
professeur en CPGE

Augustin LONG  
ENS Lyon

Guillaume MAIMBOURG  
ENS Cachan

Tom MOREL  
professeur en CPGE

Valentin RABAN  
ENS Lyon

Louis SALKIN  
professeur en CPGE

# Sommaire thématique de physique

2015 – 2017

e3a PSI Physique-Modélisation	•	•			•		•			••		
e3a PSI Physique et Chimie	••	•		•	•	•		•				
CCP MP Physique				••	•					••	••	•
CCP MP Physique et Chimie	•	••			•		•					
CCP PC Physique	•	•			••		•••	••		•	•	••
CCP PC Modélisation Phys-Chimie				•								
CCP PSI Physique et Chimie	•	•		•	••	•	•			••	•	
CCP PSI Modélisation numérique	•	•				•				•		
Centrale MP Physique et Chimie 1		•	•	•	•		•••			•		••
Centrale MP Physique et Chimie 2	•			•	•		••			•	••	
Centrale PC Physique 1				•	•			••	•	••	•	
Centrale PC Physique 2	••	•		•	•		•	•	••		••	••
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•			••		•	•			•		
Centrale PSI Physique et Chimie 2	••	•			••	•	••	•	•	•	•	
Mines MP Physique 1	•				•		••		•	••		•
Mines MP Physique 2	••		•	••			•••			•		•
Mines PC Physique 1	•				•		••	••	•	••		
Mines PC Physique 2	••	•					•	••	••	•		•
Mines PSI Physique 1	•				•		••	••	•	••		
Mines PSI Physique 2	•				•		•	•		•		
X/ENS MP Physique			•				••		•	•	•	
X MP Physique et SI	•						•••		•	•	•	•
X PC Physique A	•				•		•••	•		••	••	•
X/ENS PC Physique B				•			•••	••		••		
	Thermodynamique générale	Phénomènes diffusifs	Physique statistique	Électrostatique et magnétostatique	Électronique	Conversion de puissance	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	Électromagnétisme	Optique	Physique quantique

---

# Sommaire

---

		Énoncé	Corrigé
<b>CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES</b>			
Physique	Circulation sanguine et enrichissement de l'uranium. <i>bilan de masse, mécanique des fluides, effet Doppler, mécanique quantique</i>	11	27
Modélisation, Physique et Chimie	Autour de l'équation de Poisson. <i>électrostatique, résolution numérique, équations aux dérivées partielles, équations différentielles, théorème de Gauss, développement limité, méthode d'Euler</i>	43	58
Chimie	Le sodium. Synthèse du fragment Nord-Est de la griséoviridine. <i>cristallographie, mélanges binaires, oxydoréduction, diagramme E-pH, thermodynamique, orbitales moléculaires, chimie organique</i>	73	87
<b>CENTRALE-SUPÉLEC</b>			
Physique 1	Éléments de communication par fibre optique. <i>électromagnétisme, ondes électromagnétiques, lasers</i>	107	115
Physique 2	Interférométrie atomique. <i>thermodynamique, mécanique quantique, optique ondulatoire, propagation d'onde</i>	131	138
Chimie	Autour du méthacrylate de méthyle. <i>polymères, thermodynamique, mélanges binaires, chimie organique, chimie de coordination</i>	157	173

### MINES-PONTS

Physique 1	Les memristors. <i>électromagnétisme, électrocinétique, mécanique des fluides</i>	193	200
Physique 2	Voyage au cœur du Soleil. <i>mécanique des fluides, thermodynamique, électromagnétisme, propagation d'ondes acoustiques</i>	211	219
Chimie	L'I.T.O. Synthèse du tétrahydrogestrinone (THG). <i>cristallographie, diagrammes E-pH, thermodynamique, courbes courant-potentiel, chimie organique</i>	237	257

### POLYTECHNIQUE-ENS

Physique A	Catapultes. <i>mécanique des fluides, capillarité, induction électromagnétique, électronique, mécanique</i>	271	277
Physique B	Transparence électromagnétiquement induite dans un plasma froid magnétisé. <i>mécanique, électromagnétisme, propagation d'ondes</i>	295	303
Chimie	Le glucose en synthèse et chimie des polymères. Intérêt des tensioactifs en analyse et en synthèse. <i>chimie organique, polymères, solutions aqueuses</i>	316	334

### FORMULAIRES

Constantes chimiques	360
Constantes physiques	363
Formulaire d'analyse vectorielle	364
Classification périodique	368

# Sommaire thématique de chimie

2015 – 2017

e3a PSI Physique et Chimie			•	•			••				
CCP MP Physique et Chimie	••	••	•	•	•••	•	•••				
CCP PC Chimie	•••	•	•	••	•		•••	••	•••	•••	•
CCP PC Modélisation Phys-Chimie											
CCP PSI Physique et Chimie	•	•		••	•	••		•			
Centrale MP Physique et Chimie 1	•										
Centrale MP Physique et Chimie 2	••	•	•	••	•	••	••				
Centrale PC Chimie	•		•	••	••	•	•	•	•••	••	••
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•	•		•							
Centrale PSI Physique et Chimie 2		•		••	••	•	••				
Mines MP Chimie	•••	••		•••	••	••	•••				
Mines PC Chimie	•	•	••	•	••	•	••		•••		
Mines PSI Chimie	•••	••		••	••	••	•••	•			
X/ENS PC Chimie		•	•	••			••	•	•••	•	
	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-pH	Courbes courant-potentiel	Thermodynamique	Mélanges binaires	Chimie organique	Orbitales moléculaires	Chimie de coordination

SESSION 2017

PCPH003

**CONCOURS COMMUNS  
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC****PHYSIQUE****Mercredi 3 mai : 8 h - 12 h**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**Les calculatrices sont autorisées**

**Le sujet est composé de 2 problèmes indépendants.**

**Chaque problème est constitué de parties indépendantes.**

Leur poids est approximativement de  $\frac{2}{3}$  pour le problème 1 et de  $\frac{1}{3}$  pour le problème 2.

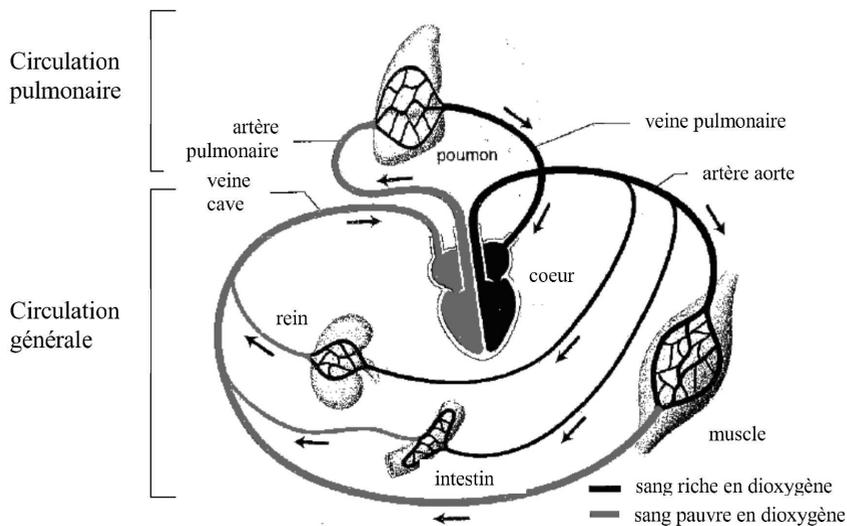
## PROBLÈME 1

### La circulation sanguine

Le 18 décembre 2013 à l'hôpital européen Georges-Pompidou de Paris, le premier cœur 100 % artificiel et autonome était implanté sur un patient. Cette prouesse n'aurait pu être réalisée sans les nombreuses découvertes théoriques et expérimentales qui l'ont précédée. Aussi, nous nous proposons, dans ce problème, d'en étudier un des aspects : la circulation sanguine. Ce domaine de la physiologie est appelé l'hémodynamique.

Le **figure 1** représente le système vasculaire humain. La cavité droite du cœur envoie le sang appauvri en dioxygène dans les poumons à travers l'artère pulmonaire. Les poumons enrichissent le sang en dioxygène. Le sang enrichi en dioxygène retourne dans le côté gauche du cœur et irrigue l'ensemble du corps puis revient au côté droit par la veine cave. Le système vasculaire issu de l'aorte se divise en artères, puis artérioles et capillaires. Le **tableau 1** page suivante donne, chez l'homme, le diamètre des différents types de vaisseaux et leur nombre.

Le cœur humain pèse environ 0,3 kilogramme et bat environ une fois toutes les secondes lorsqu'il est au repos. À chaque battement, son côté gauche injecte  $80 \text{ cm}^3$  de sang par l'aorte à la pression de 16 kPa. La puissance mécanique massique totale du cœur est de  $5 \text{ W.kg}^{-1}$ . Pour une durée de vie d'environ 80 années, cela en fait une source de travail remarquable.

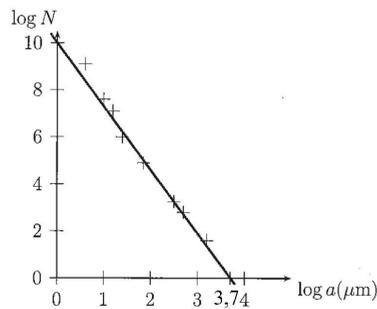


**Figure 1** – Le système vasculaire humain  
 Le côté gauche du cœur est représenté à droite et le côté droit à gauche.

Vaisseau	Diamètre $2a$ (mm)	Nombre $N$
Artère aorte	$10^1$	1
Grandes artères	3	$4 \cdot 10^1$
Branches principales	1	$6 \cdot 10^2$
Branches secondaires	$6 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^3$
Branches tertiaires	$10^{-1}$	$8 \cdot 10^4$
Artères terminales	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^6$
Branches terminales	$3 \cdot 10^{-2}$	$10^7$
Artérioles	$2 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^7$
Capillaires	$8 \cdot 10^{-3}$	$10^9$

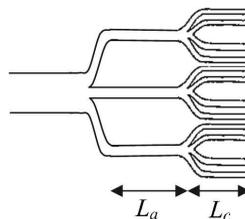
**Tableau 1** – Diamètres et nombres des différents types de vaisseaux chez l’homme

Le biologiste anglais C. Murray a étudié la relation qui existe entre le diamètre d’un vaisseau et le nombre de vaisseaux semblables. La **figure 2** où sont portés en échelle logarithmique les nombres de vaisseaux  $N$  en fonction de leur rayon  $a$  met en évidence cette relation.



**Figure 2** – Nombre de vaisseaux  $N$  en fonction de leur rayon  $a$

Cette relation peut être interprétée par un modèle simple. Le système vasculaire y est alors décrit par deux types de vaisseaux : des artères et des vaisseaux capillaires. Il est supposé être composé de  $N_a$  artères de longueur  $L_a$  et de rayon  $r_a$ , et de  $N_c$  vaisseaux capillaires de longueur  $L_c$  et de rayon  $r_c$  (**figure 3**).



**Figure 3** – Modélisation du système circulatoire artériel

## CCP Physique PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Raphaël Galicher (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Vincent Freulon (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

---

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants dont les parties sont elles aussi indépendantes.

Le premier problème étudie la circulation sanguine dans le corps humain.

- La première partie permet d'établir des résultats généraux sur la circulation sanguine. Elle est courte et ne demande que de savoir calculer un débit volumique et exprimer une puissance à partir d'une force de pression.
- La deuxième partie établit une expression de la résistance hydraulique de l'ensemble du système vasculaire. Elle est plus compliquée que la première mais reste de difficulté modérée si le cours sur l'équation de Navier-Stokes est connu.
- La troisième fait établir une loi théorique reliant le nombre de vaisseaux sanguins à leurs rayons, que l'on compare à une loi empirique.
- La quatrième partie étudie l'élasticité des vaisseaux sanguins à partir de l'équation d'Euler et établit l'équation de propagation d'une onde de surpression dans ces vaisseaux. Sa difficulté est modérée si le cours sur les ondes acoustiques est maîtrisé.
- La dernière partie traite de la mesure de la vitesse de circulation du sang par effet Doppler. Elle peut être compliquée si c'est la première fois qu'on étudie ce phénomène. Plusieurs questions font appel au sens physique et ne demandent aucun calcul.

Le second problème étudie la séparation isotopique par laser sur vapeur atomique, procédé envisagé par le commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives pour enrichir le minerai d'uranium naturel en uranium 235. Le problème est divisé en trois parties.

- La première partie demande de faire un bilan de masse et d'écrire le rendement en puissance.
- La deuxième partie propose une étude des énergies de liaison via le modèle de Bohr. C'est la partie la plus difficile du sujet même si l'étude est guidée pas à pas par l'énoncé.
- La troisième partie étudie plusieurs généralités du procédé d'enrichissement : mouvement d'un électron dans un champ magnétique constant et uniforme, puissance nécessaire pour vaporiser un solide, ionisation par absorption d'un photon.

Le sujet permet de travailler ou réviser de nombreuses notions : équations d'Euler et de Navier-Stokes, résistance hydraulique, bilans de masse et de puissance, effet Doppler, modèle de Bohr, mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, énergie de vaporisation.

## INDICATIONS

### Problème 1 : la circulation sanguine

- 2 Exprimer la puissance mécanique fournie par le côté gauche en fonction de la surpression dans l'aorte et du débit volumique de sang.
- 5 Le débit volumique de sang dépend de la vitesse moyenne de celui-ci.
- 11 On détermine les constantes d'intégration à partir des conditions aux limites :  $dv/dr$  est finie en  $r = 0$  et  $v(a) = 0$ .
- 13 Les  $N_c$  capillaires sont en parallèle. Même remarque pour les  $N_a$  artères. L'ensemble de celles-ci est en série avec l'ensemble des capillaires.
- 15 Utiliser le résultat de la question 13 pour trouver une seconde expression de  $dr_c/dr_a$ . Utiliser ensuite le résultat de la question 14.
- 16 Étudier la validité des hypothèses faites par l'énoncé.
- 21 Utiliser les résultats des questions 18 et 20.
- 24 L'expression de  $f''$  s'obtient en considérant que la sonde reçoit l'onde de fréquence  $f'$  émise par le globule rouge.

### Problème 2 : enrichissement de l'uranium

- 29 La masse d'uranium est conservée.
- 30 Utiliser l'expression de la question 29 pour trouver  $F$ .
- 31 Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à l'électron.
- 33 Relier  $L$  et  $p$ , trouver l'expression de  $r_0$  et exprimer  $E$  en fonction de  $L$  pour en déduire  $E_0$ .
- 37 Remplacer  $m_e$  par  $\mu_H$  et  $\mu_D$  dans le résultat de la question 33.
- 38 Remplacer  $m_e$  par  $\mu_H$  et  $\mu_D$  dans le résultat de la question 35.
- 39 Étudier la force de Lorentz qui s'applique aux électrons. La force centripète et celle de Lorentz sont de même module.
- 40 Exprimer la puissance nécessaire pour vaporiser l'uranium avec le débit massique  $dm/dt$ . Considérer que la puissance transportée par les électrons est totalement utilisée lors de cette vaporisation.

## PROBLÈME 1 : LA CIRCULATION SANGUINE

**1** Le cœur injecte un volume  $\mathcal{V}_c = 80 \text{ cm}^3$  de sang dans le système vasculaire à la fréquence  $f_c = 60 \text{ min}^{-1}$ . Le volume total de sang injecté en une minute est par conséquent

$$\mathcal{V}_c f_c = 80 \times 10^{-3} \times 60 = 4,8 \text{ L.min}^{-1}$$

Cette valeur correspond environ aux cinq litres de sang contenus dans le corps d'un adulte. Ainsi, chaque minute, la totalité du sang passe par le cœur.

**2** La puissance mécanique massique totale du cœur  $\mathcal{P}_{c,m}$  est égale à la somme des puissances mécaniques des côtés droit ( $\mathcal{P}_d = 0,2 \text{ W}$ ) et gauche ( $\mathcal{P}_g$ ) du cœur divisée par la masse du cœur  $m_c$

$$\mathcal{P}_{c,m} = \frac{\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_g}{m_c}$$

La puissance  $\mathcal{P}_g$  est le produit de la fréquence des battements  $f_c$  et du travail de la force de surpression  $\mathcal{V}_c P_c$ , avec  $P_c = 16 \text{ kPa}$ . Ainsi

$$\mathcal{P}_g = P_c \mathcal{V}_c f_c$$

On en déduit l'expression de  $\mathcal{P}_{c,m}$

$$\mathcal{P}_{c,m} = \frac{\mathcal{P}_d + P_c \mathcal{V}_c f_c}{m_c} = \frac{0,2 + 16 \times 10^3 \times 80 \times 10^{-6} \times 1}{0,3} = 5 \text{ W.kg}^{-1}$$

Cette valeur est bien celle annoncée par l'énoncé.

**3** Des réactions chimiques convertissent l'énergie reçue par le muscle en travail mécanique. En moyenne, ces réactions chimiques sont exothermiques et une grande partie de l'énergie reçue par le muscle est convertie en énergie thermique, ce qui maintient la température du corps à 37 degrés Celsius. L'énergie restante est utilisée pour le fonctionnement interne de la cellule (transport de molécules par exemple).

**4** D'après la figure 2, une loi linéaire lie  $\log N$  et  $\log a$  :

$$\log N = \alpha_1 \log a + \beta_1$$

L'ordonnée en  $\log a = 0$  donne  $\beta_1 = 10$  et l'abscisse  $\log a = 3,74$  pour  $\log N = 0$  permet d'écrire :

$$\alpha_1 = -\frac{\beta_1}{3,74} = -2,7$$

Finalement, on a

$$N = 10^{10} a^{-2,7} \text{ avec } a \text{ en micromètres.}$$

On peut aussi utiliser les valeurs du tableau 1 pour tracer  $N$  en fonction de  $a$  en échelle logarithmique, réaliser un ajustement linéaire et obtenir la loi :

$$N = 10^{10} a^{-2,8} \text{ avec } a \text{ en micromètres.}$$

**5** Le débit volumique  $\mathcal{V}_c f_c$  s'exprime en fonction de la section de l'artère aorte  $\pi a_a^2$  et de la vitesse moyenne  $v_a$  du sang dans celle-ci, selon

$$\mathcal{V}_c f_c = \pi a_a^2 v_a$$

On en déduit

$$v_a = \frac{\mathcal{V}_c f_c}{\pi a_a^2} = \frac{80 \times 10^{-6} \times 1}{\pi \times (5 \times 10^{-3})^2} = 1,0 \text{ m.s}^{-1}$$

**6** Pour mettre en mouvement le sang, il faut une différence de pression. La viscosité du fluide implique aussi une perte de charge par frottement, ce qui explique que la pression décroît le long du tuyau cylindrique considéré.

**7** Dans le membre de gauche, le terme  $\rho \partial v / \partial t$  est l'accélération locale tandis que  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  est l'accélération convective. Dans le membre de droite,  $\overrightarrow{\text{grad}} P$  est la force volumique de pression,  $\eta \Delta \vec{v}$  représente la force volumique de viscosité et  $\vec{f}_{\text{vol}}$  est la résultante des autres forces volumiques s'appliquant aux particules de fluide.

**8** Si le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$  est inférieur à  $10^3$ , l'écoulement peut être considéré comme laminaire. Ici,

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v a_a}{\eta} = \frac{10^3 \times 1 \times 5 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 5 \cdot 10^3 > 10^3$$

**L'écoulement ne peut donc pas être considéré comme laminaire dans l'aorte. En revanche, dans les vaisseaux de diamètres plus petits, la condition est vérifiée.**

**9** D'après l'énoncé, on a

- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$  car l'écoulement est stationnaire ;
- $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{e}_x = \vec{0}$  car  $v_x = \vec{v} \cdot \vec{e}_x = v(r)$  est indépendant de  $x$  ;
- $\vec{f}_{\text{vol}} = \vec{0}$  puisque les effets de pesanteur sont négligés.

Finalement, l'équation de Navier-Stokes se simplifie en

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} P = \eta \Delta \vec{v}}$$

⌊ L'hypothèse d'un écoulement laminaire est implicitement faite par l'énoncé puisque  $\vec{v} = v \vec{e}_x$ , ce qui est contradictoire avec la question précédente.

**10** L'énoncé donne l'expression de la force appliquée par le fluide situé entre les rayons  $r$  et  $a$  sur la face supérieure en  $r$ . On en déduit directement  $\vec{dF}_+$  qui s'applique sur la face supérieure en  $r + dr$ .

$$\vec{dF}_+ = \eta \left( \frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} \Sigma(r+dr) \vec{e}_x$$

Pour obtenir la force  $\vec{dF}_-$  qui s'applique sur la face inférieure en  $r$ , on applique la troisième loi de Newton selon laquelle  $\vec{dF}_-$  est égale à l'opposé de la force appliquée sur la face supérieure en  $r$ . Il vient

$$\vec{dF}_- = -\eta \left( \frac{dv}{dr} \right)_r \Sigma(r) \vec{e}_x$$

## CCP Modélisation de systèmes physiques ou chimiques PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par Jean-Julien Fleck (professeur en CPGE) et Cyril Ravat (professeur en CPGE).

---

Ce sujet s'intéresse à la résolution numérique de quelques phénomènes électrostatiques. Il s'organise en deux parties indépendantes.

- Dans la première, on résout l'équation de Poisson avec des conditions aux limites de Dirichlet sur un maillage carré, au moyen de trois variantes de la méthode de Jacobi. Cette partie se divise à parts égales entre l'établissement du schéma numérique et son implémentation.
- La deuxième partie propose deux applications de l'algorithme de la première partie. On étudie d'abord le champ électrostatique généré par un fil chargé. Puis on simule le fonctionnement d'un tube cathodique d'oscilloscope en modélisant la trajectoire d'un électron qui se déplace dans le champ créé par deux plaques parallèles.

L'épreuve étant assez longue, il faut veiller à traiter efficacement certaines questions calculatoires comme la démonstration des schémas numériques. Elle aborde la résolution des équations différentielles partielles et ordinaires, et utilise le résultat des premières pour simuler les secondes. À part une petite imprécision sur la variable  $h$  (qui change de dimension au cours du sujet), l'épreuve est en général claire et bien posée, et questionne à plusieurs reprises la validité des résultats obtenus. Ces questions portant sur l'interprétation des résultats sont les plus difficiles car elles nécessitent de l'observation ainsi qu'un bon esprit analytique. Le reste de l'épreuve est de difficulté moyenne, et contient notamment deux études très classiques d'électrostatique et de mécanique.

## INDICATIONS

### Partie I

- 2 L'exemple classique concerne la gravitation. Pour les autres, il faut chercher les formules faisant intervenir le gradient et la divergence.
- 4 Commencer par développer  $V(X_i \pm h, Y_j)$  et  $V(X_i, Y_j \pm h)$  à l'ordre 2 en  $h$ , puis les combiner pour atteindre l'expression demandée.
- 7 Que se passerait-il si l'on modifiait les données du tableau au fur et à mesure ?
- 11 Prendre soin de calculer l'erreur au bon moment : entre le calcul du nouveau potentiel et l'écrasement de l'ancien.
- 14 Pour estimer graphiquement la complexité, on peut comparer les temps d'exécution pour deux valeurs de  $N$  espacées d'un facteur 2.
- 15 Faire attention à ce qui se passe aux frontières du domaine.

### Partie II

- 20 Attention, la définition de  $h$  a changé ici par rapport au début de l'énoncé : c'est maintenant  $L/N$  au lieu de  $1/N$ .
- 22 Chercher les résultats obtenus précédemment dans les graphes. Ne pas oublier de commenter la valeur numérique donnée.
- 23 Le champ électrostatique est nul au centre, linéaire sur une tranche de largeur  $R/2$ , puis hyperbolique.
- 26 Attention à ne pas se tromper de conditions initiales.
- 28 Les potentiels des armatures sont fixés.
- 30 Commencer par établir les expressions de  $\frac{dE_x(ih, jh)}{dx}$  et  $\frac{dE_y(ih, jh)}{dy}$  en fonction de  $E_x[i, j]$ ,  $E_x[i+1, j]$  et  $E_x[i, j+1]$ .
- 31 Décrire brièvement ce que réalise la méthode d'Euler.

## I. ÉQUATION DE POISSON

**1** L'équation de Maxwell-Gauss relie la divergence de  $\vec{E}$  à la distribution volumique de charges électriques  $\rho$  :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Par ailleurs  $\vec{E}$  est l'opposé du gradient du potentiel électrostatique  $V$  :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V}$$

De plus,  $\Delta V = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V)$ . En combinant ces trois équations, on obtient bien

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

La **densité volumique de charge électrique**  $\rho$  s'exprime en  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{m}^{-3}$ . Et l'unité usuelle de  $\varepsilon_0$ , la **permittivité diélectrique du vide**, est  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{m}^{-1}$ .

**2** On retrouve l'équation de Poisson dans plusieurs domaines de la physique, les grandeurs  $\vec{E}$ ,  $V$ ,  $\rho$  et  $\varepsilon_0$  pouvant respectivement s'identifier à

- $\vec{G} = \vec{F}/m$ ,  $\Phi = E_p/m$ ,  $\rho$  et  $-1/(4\pi\mathcal{G})$  en gravitation newtonienne. On retrouve

$$4\pi\rho\mathcal{G} + \operatorname{div} \vec{G} = 0, \quad \vec{G} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi \quad \text{et} \quad \Delta\Phi = 4\pi\rho\mathcal{G}$$

- $\vec{j}$ ,  $T$ ,  $P$  (puissance de production thermique) et  $\lambda$  dans la conduction thermique en régime stationnaire. On retrouve

$$\operatorname{div} \vec{j} = P, \quad \vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \quad \text{et} \quad \Delta T + \frac{P}{\lambda} = 0$$

- $\vec{j}$ ,  $n$ ,  $P$  (terme de production) et  $D$  dans la diffusion de particules, également en régime stationnaire. On retrouve aussi

$$\operatorname{div} \vec{j} = P, \quad \vec{j} = -D \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \quad \text{et} \quad \Delta n + \frac{P}{D} = 0$$

- En prenant la divergence de l'équation d'Euler incompressible en régime permanent  $\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p + \operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{v}) = 0$ , on obtient aussi une équation de Poisson :

$$\frac{1}{\rho} \Delta p + \operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{U} = \operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{v})$$

L'intégralité de cette réponse n'était sûrement pas attendue ! On aurait pu se contenter des deux ou trois premiers exemples.

**3** En développant le laplacien, on obtient

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\rho(x, y)}{\varepsilon_0} = 0$$

or, par changement de variable,

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial X^2} \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 = \frac{\partial^2 V(X, Y)}{\partial X^2} \frac{1}{L^2}$$

et de façon similaire pour  $\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2}$ , d'où

$$\boxed{\frac{\partial^2 V(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V(X, Y)}{\partial Y^2} + \rho'(X, Y) = 0 \quad \text{avec} \quad \rho'(X, Y) = \rho(x, y) \frac{L^2}{\varepsilon_0}}$$

**4** On peut exprimer  $V(X_i \pm h, Y_j)$  et  $V(X_i, Y_j \pm h)$  à l'aide d'un développement limité d'ordre 2 autour de  $V(X_i, Y_j)$ :

$$\begin{aligned} V(X_i \pm h, Y_j) &= V(X_i, Y_j) \pm \frac{\partial V(X_i, Y_j)}{\partial X} h + \frac{\partial^2 V(X_i, Y_j)}{\partial X^2} \frac{h^2}{2} + O(h^3) \\ V(X_i, Y_j \pm h) &= V(X_i, Y_j) \pm \frac{\partial V(X_i, Y_j)}{\partial Y} h + \frac{\partial^2 V(X_i, Y_j)}{\partial Y^2} \frac{h^2}{2} + O(h^3) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} V(X_i + h, Y_j) + V(X_i - h, Y_j) &= 2V(X_i, Y_j) + \frac{\partial^2 V(X_i, Y_j)}{\partial X^2} h^2 + O(h^3) \\ V(X_i, Y_j + h) + V(X_i, Y_j - h) &= 2V(X_i, Y_j) + \frac{\partial^2 V(X_i, Y_j)}{\partial Y^2} h^2 + O(h^3) \end{aligned}$$

En combinant ces équations, on obtient bien

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = \frac{V(X_i + h, Y_j) + V(X_i - h, Y_j) + V(X_i, Y_j + h) + V(X_i, Y_j - h)}{h^2} - 4 \frac{V(X_i, Y_j)}{h^2} + O(h)}$$

En faisant les calculs à l'ordre supérieur, on se rend compte que les termes en  $h^3$  s'annulent également : on pourrait donc remplacer le  $O(h)$  du résultat final par un  $O(h^2)$ .

Pour rappel,  $f(h) = O(h^n)$  exprime que  $f(h)$  est bornée asymptotiquement par  $h^n$  : il existe un  $k > 0$  tel qu'à partir d'un certain  $h$ ,

$$|f(h)| \leq k \cdot h^n$$

**5** En insérant le résultat de la question précédente dans celui de la question 3, on obtient dans les notations discrètes de l'énoncé

$$\frac{V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1) - 4V(i, j)}{h^2} + \rho(X_i L, Y_j L) \frac{L^2}{\varepsilon_0} = 0$$

d'où l'on déduit que

$$\boxed{\rho''(i, j) = \rho(i h L, j h L) \frac{h^2 L^2}{\varepsilon_0}}$$

Profitions-en pour vérifier les unités :  $h$  est sans dimension, l'unité de  $\rho''$  est donc  $\frac{C}{m^3} \frac{m^2}{F/m}$ , ce qui se réduit bien à des volts, l'unité de  $V$ . Attention, la définition de  $h$ , ainsi que sa dimension, change en cours de sujet. Dans la dernière partie,  $h$  est en effet défini par  $L/N$  et est donc bien une longueur.

## CCP Chimie PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Margaux Galland (ENS Lyon) ; il a été relu par Augustin Long (ENS Lyon) et Claire Besson (docteur en chimie).

---

Le sujet est classiquement composé de deux problèmes indépendants, l'un portant sur la chimie générale, l'autre sur la chimie organique.

Le premier problème s'intéresse au sodium métallique à travers l'étude de son noyau, de ses propriétés physico-chimiques et de sa formation. Le sodium est un élément reconnu depuis longtemps dans des composés, en particulier dans les sels ioniques. L'espèce au degré d'oxydation 0 est extrêmement réactive, ce qui la rend difficilement utilisable. Le cation  $\text{Na}^+$  étant cependant stable, ses composés sont largement employés, notamment dans l'industrie.

- La première partie étudie le noyau du sodium, sa radioactivité et l'application de celle-ci en médecine.
- La deuxième partie étudie les propriétés physico-chimiques et la réactivité du sodium métallique.
- Les troisième et quatrième parties s'intéressent au sodium métallique. On étudie son obtention par électrolyse puis son utilisation à l'échelle industrielle dans les accumulateurs soufre-sodium.
- Enfin, la dernière partie utilise les orbitales moléculaires pour l'étude de la liaison entre le sodium et l'hydrogène.

Le deuxième problème a pour sujet la synthèse d'un fragment de la griséoviridine, qui est un antibiotique appartenant à une famille pour laquelle pratiquement aucun germe ne présente actuellement de résistance acquise.

- Les quatre premières parties traitent de la synthèse de la molécule d'intérêt à travers l'étude de différents fragments.
- La cinquième partie étudie la macrolactonisation donnant accès à un synthon de la griséoviridine à travers l'étude documentée de la réaction de Mitsunobu.
- Enfin, la dernière partie traite de la réaction d'aminocarboxylation de Heck et de l'étude du catalyseur de cette réaction.

Certaines questions de ce sujet peuvent sembler compliquées au premier abord mais de nombreux documents, dans lesquels beaucoup d'indices sont disséminés, permettent d'obtenir les réponses.

## INDICATIONS

### Problème I

- 4 Quand le sang est prélevé, le radionucléide a déjà passé six heures dans le corps du patient.
- 5 Utiliser le fait que le sodium cristallise dans une maille cubique centrée pour calculer la densité du sodium.
- 6 Utiliser les données rassemblées en fin d'énoncé.
- 7 La réaction peut être considérée comme adiabatique. Employer la loi de Hess et choisir un chemin pour calculer la fonction d'état considérée.
- 10 Raisonner sur les conductivités données en annexe.
- 19 Utiliser le lien entre la force électromotrice et l'enthalpie libre standard et la définition de l'enthalpie libre standard pour trouver les valeurs demandées.
- 20 Calculer le nombre de moles d'électrons échangés au cours de la réaction. La capacité de la batterie est le débit de charges.

### Problème II

- 28 Quelles sont les propriétés du DMSO ?
- 30 Comparer les quantités de matières des réactifs introduites pour comprendre l'utilité des lavages.
- 35 Comparer les degrés d'oxydation du soufre dans le réactif et le produit.
- 40 L'hydrogène terminal de l'alcyne est acide.
- 41 Le groupement TES est un groupement silylé qui se clive en milieu acide.
- 43 La stéréosélectivité de la réaction est la même que pour la réaction entre un nucléophile et un dérivé halogéné primaire.
- 44 Penser à la stéréosélectivité de la dernière étape de la macrocyclisation de Mitsunobu.
- 46 Quelle est la nature des ligands coordonnés au métal ?
- 50 Les orbitales *d* du palladium n'interagissent pas toutes avec celles du ligand CO. Raisonner sur les recouvrements.

## I. LE SODIUM

**1** La configuration électronique dans l'état fondamental est obtenue en appliquant les règles de Klechkowski, Hund et Pauli. Comme le sodium est dans la troisième ligne et la première colonne du tableau périodique, sa configuration électronique dans l'état fondamental est :

$$\boxed{\text{Na: } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1}$$

Cet élément appartient à la famille des **métaux alcalins**. Le numéro atomique du sodium étant  $Z = 11$ , le noyau du sodium  $^{23}\text{Na}$  est composé de **11 protons et 12 neutrons**.

**2** La demi-vie d'un radionucléide est **le temps au bout duquel la moitié de ce même radionucléide aura naturellement disparu par désintégration**.

Pour utiliser un radionucléide en médecine nucléaire, il est préférable que ce dernier ne reste pas trop longtemps dans le corps du patient après l'injection afin de ne pas endommager trop de tissus sains. Le temps de demi-vie du sodium  $^{22}\text{Na}$  étant de 2,6 ans et celui du sodium  $^{24}\text{Na}$  étant de 15 heures, **il est donc mieux d'utiliser le sodium  $^{24}\text{Na}$  en médecine nucléaire**.

**3** Les équations de réaction modélisant les transformations nucléaires des isotopes du sodium  $^{22}\text{Na}$  et  $^{24}\text{Na}$  sont :



Ces deux réactions ont pour loi de vitesse respectives :

$$\boxed{v_1 = k_1 [{}^{22}_{11}\text{Na}] \quad \text{et} \quad v_2 = k_2 [{}^{24}_{11}\text{Na}]}$$

On a alors  $[{}^{22}_{11}\text{Na}] = [{}^{22}_{11}\text{Na}]_0 e^{-k_1 t}$  et  $[{}^{24}_{11}\text{Na}] = [{}^{24}_{11}\text{Na}]_0 e^{-k_2 t}$

Lorsque que le temps de demi-vie est atteint, la moitié des noyaux présents initialement se sont désintégrés. On a donc :

$$\frac{[{}^{22}_{11}\text{Na}]_0}{2} = [{}^{22}_{11}\text{Na}]_0 e^{-k_1 T_1} \quad \text{et} \quad \frac{[{}^{24}_{11}\text{Na}]_0}{2} = [{}^{24}_{11}\text{Na}]_0 e^{-k_2 T_2}$$

Finalement,

$$\boxed{T_1 = \frac{\ln 2}{k_1} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{\ln 2}{k_2}}$$

**4** La quantité de matière de radionucléide injectée au patient est :

$$n_{\text{inj}} = C_0 V_0 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

Celle prélevée après six heures est :

$$n_p = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ mol} = V_0 C^{\text{sang}}(t = 6 \text{ h})$$

Or  $C^{\text{sang}}(t) = C_0^{\text{sang}} e^{-kt} = \frac{n_{\text{inj}}}{V_{\text{sang}}} e^{-kt}$

donc 
$$n_p = \frac{n_{\text{inj}} V_0}{V_{\text{sang}}} e^{-\frac{\ln 2 t}{T}}$$

soit

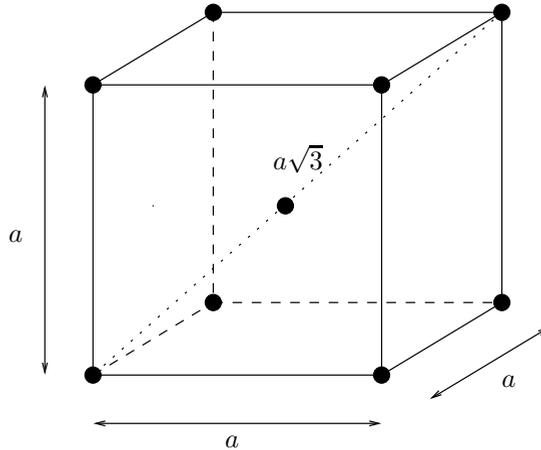
$$\boxed{V_{\text{sang}} = \frac{n_{\text{inj}} V_0}{n_p} e^{-\frac{\ln 2 t}{T}}}$$

Numériquement,

$$\boxed{V_{\text{sang}} = \frac{1,0 \cdot 10^{-5} \times 10 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 10^{-3}} e^{-\frac{6 \cdot \ln 2}{15}} = 5,1 \text{ L}}$$

Sachant que le patient pèse  $m = 80 \text{ kg}$  et a un volume sanguin moyen de  $75 \text{ mL.kg}^{-1}$ , on s'attend à trouver un volume de sang total proche de  $V = 75.10^{-3} \times 80 = 6 \text{ L}$ , ce qui est bien le cas. La différence peut être due aux hypothèses formulées, notamment supposer que la répartition du sang dans le corps est uniforme.

**5** Calculons la densité du sodium définie par  $d = \rho_{\text{Na}}/\rho_{\text{eau}}$ . Pour cela utilisons la structure cristallographique du sodium. Le document 1 précise que le sodium cristallise dans une maille cubique centrée :



Il y a 2 atomes de sodium par maille car les 8 atomes au coin du cube comptent chacun pour 1/8 et il y a un atome au centre. De plus, il y a contact entre atomes sur la grande diagonale donc

$$a\sqrt{3} = 4R_{\text{Na}} \quad \text{avec } a \text{ arrête du cube}$$

On a alors

$$\rho_{\text{Na}} = \frac{2M_{\text{Na}}/\mathcal{N}_A}{a^3}$$

soit

$$\rho_{\text{Na}} = \frac{2M_{\text{Na}}(\sqrt{3})^3}{\mathcal{N}_A 4^3 R_{\text{Na}}^3}$$

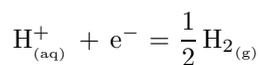
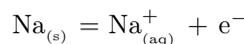
$$\text{d'où} \quad \rho_{\text{Na}} = \frac{2 \times 23 \times 10^{-3} \times (\sqrt{3})^3}{64 \times 6,02 \times 10^{23} \times (186 \times 10^{-12})^3} = 9,6.10^2 \text{ kg.m}^{-3}$$

Donc

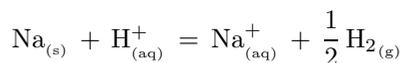
$$\boxed{d = 0,96 < 1}$$

Le sodium est moins dense que l'eau, **il flotte donc sur l'eau.**

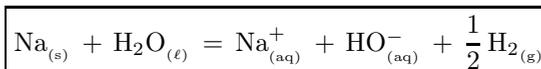
**6** Il s'agit d'une réaction d'oxydo-réduction entre les couples  $\text{Na}^+/\text{Na}$  et  $\text{H}^+/\text{H}_2$ . Les demi-équations de réaction sont



On a donc



soit



## Centrale Physique 1 PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Valentin Raban (doctorant ENS Lyon) ; il a été relu par Raphaël Galicher (enseignant-chercheur à l'université) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

---

Le sujet est centré sur la physique du transport de signaux électromagnétiques par les fibres optiques, dont l'impact technologique est gigantesque. Par exemple, toutes les données téléphone et internet échangées entre les continents sont transmises par des fibres optiques sous-marines.

L'énoncé est construit en trois parties indépendantes, très inégales en longueur et difficulté.

- La première partie, très courte, est une introduction au sujet. En se fondant sur la courbe de l'atténuation dans la fibre, elle permet de justifier d'une part les longueurs d'onde employées et d'autre part la nécessité d'amplifier le signal.
- La deuxième partie se concentre justement sur le procédé d'amplification. Le mécanisme se basant sur l'émission stimulée, on commence par montrer qu'un milieu constitué d'ions à seulement deux niveaux ne peut pas convenir à cause de l'impossibilité de l'inversion de population. Un système à trois niveaux est proposé, aboutissant au calcul du gain en décibels par mètre, qui est alors comparé à l'atténuation naturelle de la fibre.
- La troisième partie se focalise sur la physique d'un système de démultiplexage, s'appuyant sur la polarisation des ondes électromagnétiques. On commence par étudier l'effet de la traversée d'une lame biréfringente sur la polarisation. Ensuite, des lames de différents types (calcite et cristaux liquides) sont accolées et placées entre un polariseur et un analyseur afin de réaliser un filtre accordable en longueur d'onde.

La partie II n'est pas très longue et assez proche de la physique des lasers. Elle constitue ainsi un bon exercice de révision sur le sujet. La partie III, plus longue et plus technique, porte sur le phénomène de biréfringence. Bien que le phénomène ne soit pas au programme, l'utilisation en travaux pratiques des lames  $\lambda/4$  et  $\lambda/2$ , qui sont en fait des lames biréfringentes, l'est. À ce titre, les parties III.A, III.B et III.C constituent un excellent exercice d'approfondissement des travaux pratiques sur la polarisation des ondes électromagnétiques.

## INDICATIONS

### Partie I

- I.A.2 Utiliser la figure 2 de l'énoncé.
- I.B.3 La puissance du signal ne doit pas être inférieure à la puissance minimale détectable par un récepteur.

### Partie II

- II.A.4 Il y a deux sources pour l'onde électromagnétique : l'émission stimulée qui augmente l'énergie et l'absorption qui la diminue.
- II.A.5 La direction des photons émis spontanément est aléatoire.
- II.B.3.a Le nombre d'ions produits par absorption du faisceau pompe est aussi le nombre de photons absorbés. C'est donc, par unité de temps, la puissance absorbée divisée par l'énergie d'un photon.
- II.B.3.b L'hypothèse  $\Pi_p(z) \gg \Pi_s(z)$  revient à négliger tous les processus liés au faisceau signal.
- II.B.3.c Effectuer un bilan du nombre d'ions dans l'état 2. Utiliser alors l'équation II.1 modifiée pour le faisceau pompe avec  $n_3 = 0$ .
- II.B.4 Utiliser l'équation II.1 modifiée pour le faisceau pompe avec  $n_3 = 0$  et la conservation du nombre d'ions  $n_0 = n_1 + n_2$ .
- II.B.5 Remplacer  $n_1$  par son expression dans l'équation II.1 pour  $\Pi_p$ .
- II.B.6.a Remplacer  $n_1 = n_0 - n_2$  puis remplacer  $n_2$  par son expression dans l'équation II.1 du faisceau signal  $\Pi_s$ .
- II.B.6.c Le gain doit être maximal.

### Partie III

- III.A.3 Utiliser l'équation de Maxwell-Gauss pour l'onde plane sinusoïdale.
- III.B.2.c Repasser en notation réelle pour tracer la trajectoire.
- III.B.5 Il faut  $\varphi' = \pi/2$  (resp.  $\pi$ ) pour obtenir une polarisation circulaire droite (resp. rectiligne) en sortie.
- III.C.1 Produire d'abord une polarisation rectiligne puis ensuite la polarisation circulaire droite. Pour que la polarisation soit circulaire (et non seulement elliptique) il faut  $|E_x| = |E_y|$ , ce qui s'obtient en orientant la lame à retard de  $45^\circ$  par rapport à la polarisation rectiligne incidente.
- III.C.2 Chercher à éliminer la composante circulaire gauche. Pour cela, il faut la transformer en polarisation rectiligne puis la couper grâce à un polariseur incliné à  $90^\circ$ .
- III.D.3.b Essayer les trois valeurs de  $p$  pour les longueurs d'onde minimale et maximale.
- III.E.1.a Le champ voit sa composante selon  $Y_1$  être changée en son opposée. De même ensuite avec  $Y_2$ .
- III.F.1.b Si  $\lambda$  s'éloigne de  $\lambda_0$ , les lames ne sont plus accordées et la polarisation en sortie est elliptique plutôt que rectiligne.

# ÉLÉMENTS DE COMMUNICATION PAR FIBRE OPTIQUE

## I. ÉTUDE DE LA TRANSMISSION PAR FIBRE OPTIQUE

**I.A.1** Une onde de longueur d'onde  $\lambda = 1\,550$  nm appartient au domaine des infrarouges. La fréquence  $f$  associée est

$$f = \frac{c}{\lambda} = 193 \text{ THz}$$

**I.A.2** La figure 2 indique que l'atténuation dans une fibre en silice est minimale pour des ondes de longueurs d'onde comprises entre 1 500 nm et 1 650 nm, ce qui justifie le choix de la longueur d'onde utilisée.

**I.A.3** Seize canaux de largeur spectrale 1,6 nm occupent au total 25,6 nm, ce qui est effectivement inférieur à la largeur de la bande WDM.

On peut s'attendre à avoir deux fois plus de canaux DWDM, soit 32, pour la même largeur de bande, car ils ont une largeur spectrale deux fois plus petite que ceux de la technologie WDM.

**I.B.1** Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E}(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)}{\mu_0}$$

D'après la définition de  $\Pi$  :  $\Pi(z) = \frac{1}{S} \iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S}$

où  $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne temporelle. Enfin, la puissance moyenne s'écrit

$$\mathcal{P}(z) = \iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} = S \Pi(z)$$

**I.B.2** Pour une atténuation  $A$  donnée, la puissance moyenne à la distance  $d$  est, d'après la formule de l'énoncé,

$$\mathcal{P}(d) = 10^{-dA/10} \mathcal{P}(0)$$

Sur l'exemple d'une traversée de 5 000 km (océan Atlantique), cela conduit à

$$\mathcal{P}(d) = 10^{-100} \mathcal{P}(0) \ll \mathcal{P}_{\min}$$

Il faut donc amplifier le signal pour pouvoir le détecter en sortie.

**I.B.3** Un critère pourrait être que la puissance ne doit jamais être inférieure à  $\mathcal{P}_{\min}$ . Pour cela, il faut que la distance  $d$  vérifie

$$d < d_{\max} = \frac{10}{A} \log \left( \frac{\mathcal{P}(0)}{\mathcal{P}_{\min}} \right) \approx 74 \text{ km}$$

## II. AMPLIFICATION DU SIGNAL PAR UNE FIBRE DOPÉE À L'ERBIUM

**II.A.1** Un photon de longueur d'onde  $\lambda$  a une énergie

$$\mathcal{E}_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$$

**II.A.2** La conservation de l'énergie à l'absorption impose  $\mathcal{E}_\gamma + \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ , soit

$$\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$$

**II.A.3** La conservation de l'énergie à l'émission impose encore  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_\gamma + \mathcal{E}_1$ . En utilisant la question II.A.1,

$$\lambda = \frac{hc}{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}$$

**II.A.4** Effectuons un bilan d'énergie de l'onde comprise dans la tranche située entre  $z$  et  $z + dz$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . La variation d'énergie  $\Delta E$  de l'onde à la traversée de la tranche est

$$\Delta E = -\Pi(z) S dt + \Pi(z + dz) S dt = \frac{d\Pi}{dz} S dt dz$$

Cette variation d'énergie résulte du bilan entre, d'une part, l'énergie gagnée par l'onde lorsque les ions se désexcitent par émission stimulée et, d'autre part, l'énergie perdue par l'onde pour faire passer les ions du niveau 1 au niveau 2 par absorption, soit

$$\Delta E = (\sigma^e n_2 \Pi - \sigma^a n_1 \Pi) dt dz S$$

Après division par  $S dt dz$ , le bilan conduit bien à

$$\frac{d\Pi}{dz} = (\sigma^e n_2 - \sigma^a n_1) \Pi$$

**II.A.5** Les photons émis spontanément **n'ont pas de direction privilégiée**. Ainsi, il y en a autant qui sont émis dans une direction donnée et dans la direction opposée : **ils ne participent pas à l'amplification du faisceau**.

└ A contrario, les photons émis par émission stimulée ont un comportement anisotrope puisqu'ils ont la même direction que les photons inducteurs.

**II.A.6** Le faisceau est amplifié si  $\frac{d\Pi(z)}{dz} > 0$  c'est-à-dire lorsque

$$\sigma^e n_2 > \sigma^a n_1$$

**II.A.7** L'équation (II.1) de l'énoncé montre que  $\sigma^e n_2$  et  $\sigma^a n_1$  sont en  $m^{-1}$ . Puisque  $n_2$  et  $n_1$  sont en  $m^{-3}$ , on déduit que  $\sigma^a$  et  $\sigma^e$  **ont la dimension d'une surface** et s'expriment en  $m^2$ , d'où le nom de **section** efficace.

**II.A.8** Les sections efficaces étant du même ordre de grandeur, la condition d'amplification se traduit par  $n_2 > n_1$ . Or, à l'équilibre thermodynamique, puisque  $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ , la loi de Boltzmann conduit à  $n_1 > n_2$  et donc cette condition n'est pas satisfaite. C'est pourquoi il est nécessaire de réaliser une **inversion de population**.

## Centrale Physique 2 PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Guillaume Maimbourg (agrégé de physique) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

---

Ce sujet comporte trois parties consacrées respectivement à la dynamique de particules dans une tuyère, à la diffraction d'ondes de matière et à l'interféromètre de Mach-Zehnder. La première partie est entièrement indépendante des deux autres.

- Dans la première partie, après avoir démontré plusieurs formules de thermodynamique et de dynamique des fluides, on cherche à estimer les ordres de grandeur de la température et de la vitesse des atomes en sortie de la tuyère.
- La diffraction de particules à travers un réseau optique modulé est étudiée dans la deuxième partie. Après avoir analysé l'interaction entre un atome et une onde électromagnétique stationnaire, on s'intéresse à la propagation d'une onde de matière dans ce potentiel. Cette partie repose essentiellement sur des notions du cours d'électromagnétisme et de mécanique quantique.
- Enfin, la troisième partie s'intéresse à la mesure de la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même grâce à l'interféromètre de Mach-Zehnder. Réussir cette partie suppose d'avoir bien compris la précédente.

L'épreuve, relativement compliquée, fait appel à de nombreuses notions relatives aux ondes : propagation dans un milieu matériel, interaction avec une onde stationnaire, interférences, dualité onde-corpuscule. De longueur raisonnable pour cette banque de concours, le sujet alterne des questions très calculatoires et d'autres où le raisonnement physique est primordial. Cette épreuve peut servir de problème de révision une fois que les cours sur les ondes et la mécanique quantique sont maîtrisés.

## INDICATIONS

### Partie I

- I.A.3 Écrire l'identité thermodynamique sur l'enthalpie.  
 I.A.5 Utiliser le résultat de la question I.A.3.  
 I.A.6 Prendre le logarithme du débit massique puis différentier cette expression.  
 I.B.1 L'enthalpie massique s'écrit, d'après la question I.A.2,

$$h(z) = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T(z)$$

- I.B.4 Calculer numériquement la grandeur  $\phi_{\text{col}} P_0 T_0^{-4/3}$ .

### Partie II

- II.A Dans un conducteur parfait, le champ électrique est nul. Écrire alors la continuité du champ électrique tangentiel en  $x = x_M$ .  
 II.C.4 Écrire l'équation de d'Alembert dans l'espace des fréquences.  
 II.D.3 Projeter l'expression de  $\vec{k}_d$  sur l'axe  $(Oz)$ .

### Partie III

- III.A.2 Faire un schéma simple en faisant apparaître les ordres 0, -1 et 1 pour connaître l'orientation de chaque rayon transmis et les vecteurs d'onde correspondants.  
 III.A.3 L'intensité est proportionnelle à  $|\varphi_h + \varphi_b|^2$ .  
 III.B.3 Utiliser le résultat de la question II.D.3.  
 III.B.4 Les réseaux 1 et 3 sont espacés d'une distance de  $2L$ . Pour une rotation autour de l'axe  $(Oy)$ ,

$$v_{3x}(t_2) - v_{1x}(t_2) = 2L \Omega_y$$

Injecter ensuite les résultats des questions III.B.4, II.C.1 et II.D.1.

# INTERFÉROMÉTRIE ATOMIQUE

## I. CARACTÉRISATION DE LA SOURCE ATOMIQUE

**I.A.1** L'écoulement étant stationnaire, le débit massique est conservé, d'où

$$\mathcal{D}_m = \rho(z) v(z) \mathcal{A}(z)$$

**I.A.2** La loi des gaz parfaits s'écrit  $P(z) V(z) = n R T(z)$ . Comme  $n = m/M$ ,

$$P(z) = r \rho(z) T(z) \quad \text{avec} \quad r = \frac{R}{M}$$

Pour un gaz parfait, la variation d'enthalpie massique s'écrit  $dh = c_p dT$  avec  $c_p$  la capacité thermique massique à pression constante. Or,

$$c_p = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$$

d'où

$$dh = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} dT$$

**I.A.3** Pour une transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait, la loi de Laplace s'écrit

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = C^{\text{te}}$$

La deuxième identité thermodynamique pour une transformation adiabatique réversible donne également

$$dh = T ds + \frac{V(z)}{m} dP = \frac{V(z)}{m} dP$$

Ainsi

$$dh = \frac{dP}{\rho(z)}$$

Le programme de PC stipule que les identités thermodynamiques ne doivent pas être connues mais rappelées par l'énoncé. Cette question est donc à moitié hors-programme.

**I.A.4** Les transferts thermiques entre le gaz et les parois sont négligeables. De même, les forces de pesanteur sont négligées. Le premier principe appliqué à l'écoulement entre le four et la position  $z$  devient

$$\Delta h + \Delta e_c = 0$$

avec  $e_c$  l'énergie cinétique macroscopique massique. Avec

$$\Delta e_c = \frac{1}{2} (v^2(z) - v_0^2) \simeq \frac{1}{2} v^2(z)$$

il vient

$$\frac{1}{2} v^2(z) + h(z) = h_0$$

**I.A.5** D'après la question I.A.3,  $P(z) = C^{\text{te}} \rho^\gamma(z)$ . Exprimons le carré de la célérité :

$$\begin{aligned} c_s^2 &= \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \\ &= C^{\text{te}} \gamma \rho^{\gamma-1}(z) \\ &= \frac{\gamma P(z)}{\rho(z)} && \text{avec } P(z) = C^{\text{te}} \rho^\gamma(z) \\ c_s^2 &= \gamma r T(z) && \text{d'après la question I.A.2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{c_s(z) = \sqrt{\gamma r T(z)}}$$

**I.A.6** Prenons le logarithme de l'expression du débit massique :

$$\ln \mathcal{D}_m = \ln \rho + \ln v + \ln \mathcal{A}$$

Il est toujours intéressant d'utiliser le logarithme et de différentier l'expression pour obtenir des termes en  $df/f$ .

D'après la question I.A.1, le débit massique est conservé, donc  $d(\ln \mathcal{D}_m) = 0$ , d'où

$$\frac{d\rho}{\rho(z)} + \frac{dv}{v(z)} + \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}(z)} = 0$$

Exprimons le rapport  $d\rho/\rho$  en fonction de  $dv/v$ . Or, avec la loi de Laplace,

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial P} dP = \rho(z) \chi_S dP$$

$$\text{d'où} \quad \frac{d\rho}{\rho(z)} = \chi_S dP = \frac{dP}{c_s^2 \rho(z)}$$

$$\text{D'après la question I.A.3,} \quad \frac{d\rho}{\rho(z)} = \frac{dh}{c_s^2}$$

$$\text{Avec la question I.A.4,} \quad dh = -d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -v(z) dv$$

$$\text{Il vient} \quad \frac{d\rho}{\rho(z)} = -\frac{v(z) dv}{c_s^2} = -\mathcal{M}^2(z) \frac{dv}{v(z)}$$

Combinons ces relations. Finalement,

$$\boxed{\frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}(z)} + \frac{dv}{v(z)} (1 - \mathcal{M}^2(z)) = 0}$$

**I.A.7** Le long de la tuyère, le gaz est accéléré donc  $dv > 0$ . Pour  $v < c_s$  (resp.  $v > c_s$ ),  $\mathcal{M} < 1$  (resp.  $\mathcal{M} > 1$ ). Il vient

$$d\mathcal{A}(v < c_s) < 0 \quad \text{et} \quad d\mathcal{A}(v > c_s) > 0$$

La section est décroissante pour  $v < c_s$  et croissante pour  $v > c_s$ . **La section doit donc posséder un minimum.** À la transition,  $v = c_s$  c'est-à-dire  $\mathcal{M} = 1$ .

## Centrale Chimie PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Claire Besson (docteur en chimie) ; il a été relu par Augustin Long (ENS Lyon) et Christelle Serba (docteur en chimie).

---

Ce sujet étudie le méthacrylate de méthyle, qui sert principalement de précurseur à la synthèse du polyméthacrylate de méthyle, un polymère plus connu sous le nom de plexiglas.

- La première partie, qui est aussi la plus longue et la plus difficile, s'intéresse à la production industrielle du méthacrylate de méthyle. Contrairement aux processus étudiés en général en classes préparatoires, cette synthèse s'effectue en continu. Quelques questions proches du cours se mêlent dans cette partie à des questions beaucoup plus atypiques et demandant une prise d'initiative notable.
- La deuxième partie, très courte, est un exercice de chimie organométallique classique dont le thème est une méthode de synthèse alternative du méthacrylate de méthyle utilisant un catalyseur au rhodium.
- La troisième partie, relativement courte, est un mélange de questions de cours et d'analyse de documents concernant le polyméthacrylate de méthyle.
- La quatrième et dernière partie étudie la synthèse d'une hormone juvénile d'un papillon de nuit, et n'est liée que de très loin au méthacrylate de méthyle (un des réactifs de départ peut être obtenu à partir de ce dernier). Les questions ne sont pas véritablement difficiles mais l'énoncé est foisonnant et une lecture attentive était nécessaire pour trouver les informations utiles.

Ce sujet est long et présente plusieurs questions difficiles. En revanche, les différentes parties et sous-parties sont indépendantes, ce qui permettait de ne jamais rester bloqué.

## INDICATIONS

### Partie I

- I.A.2 La première étape fait intervenir une molécule d'eau, d'origine non précisée dans l'énoncé.
- I.A.3 Calculer l'enthalpie de réaction à partir des données de la fin de l'énoncé.
- I.A.6 Dans un système ouvert comme celui présenté ici, la loi de conservation de la masse est remplacée par une conservation de débit. De même, les débits molaires remplacent les nombres de moles dans l'application des relations stoechiométriques.
- I.B.1.e Deux paramètres doivent être obtenus pour répondre à cette question : la fraction molaire en MMA dans la phase aqueuse, qui peut être lue directement sur le diagramme binaire, et la masse de la phase aqueuse, qui demande l'application du théorème des moments chimiques.
- I.B.1.f Quelle est la proportion maximale de MMA que l'on peut obtenir dans le distillat ?
- I.B.1.g Utiliser la conservation du débit de MMA.
- I.B.2.a Le diagramme présente un azéotrope.
- I.C.1.b Les valeurs de pKa sont données en fin d'énoncé.
- I.C.2.f La puissance thermique nécessaire à un processus est calculée par

$$P = |D\Delta H_m| > 0$$

avec  $D$  le débit de matière et  $\Delta H_m$  l'enthalpie massique correspondant au processus. Deux types d'enthalpies sont à considérer : celles résultant d'une variation de température et celles qui correspondent à une transformation physico-chimique.

### Partie II

- II.A.4 La chaîne oxopentyle est formée par la réaction de deux molécules d'éthène et d'une molécule de monoxyde de carbone.

### Partie III

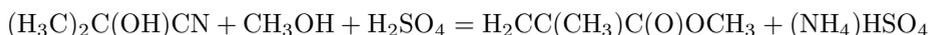
- III.B.2 La température de transition vitreuse est liée à l'intensité des interactions entre chaînes de polymère.

### Partie IV

- IV.A.2 Les unités **B** et **C** sont difficiles à départager. On peut s'aider des informations données par l'énoncé à la question IV.E.1.
- IV.B.2 La méthacroléine présente deux sites électrophiles.
- IV.C.1 La réaction est une estérification.
- IV.D.2 Cette réaction péricyclique présente un mécanisme qui se rapproche de celui d'une réaction de Diels-Alder.
- IV.D.5 Calculer la constante d'équilibre pour l'échange entre les deux états de transition.
- IV.E.1 Il est avantageux pour répondre à cette question de garder à l'esprit la structure du produit final, et de numéroter les atomes de carbone pour être sûr de n'en oublier aucun !
- IV.E.2 L'éther de vinyle qui réagit avec **10** est à **C** ce que **7** est à **B**.

## I. PROCÉDÉ DE PRODUCTION EN CONTINU DU MÉTHACRYLATE DE MÉTHYLE

**I.A.1** Le bilan de la réaction de synthèse du MMA est



Les quantités de réactifs  $n_i$  requises pour l'obtention d'une tonne de produit sont obtenues suivant la formule

$$n_i = m_i/M_i$$

avec  $m_i$  la masse du réactif  $i$  et  $M_i$  sa masse molaire, fournie en fin d'énoncé. On calcule ainsi

$$n_{(\text{H}_3\text{C})_2\text{C}(\text{OH})\text{CN}} = \frac{970}{85,0 \cdot 10^{-3}} = 1,1 \cdot 10^4 \text{ mol}$$

$$n_{\text{CH}_3\text{OH}} = \frac{380}{32,0 \cdot 10^{-3}} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ mol}$$

et

$$n_{\text{H}_2\text{SO}_4} = \frac{1700}{98,1 \cdot 10^{-3}} = 1,7 \cdot 10^4 \text{ mol}$$

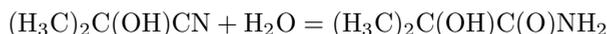
d'où l'on peut déduire que le réactif limitant est le 2-hydroxy-2-méthylpropanenitrile.

Le choix du nombre de chiffres significatifs est délicat ici. Les masses molaires sont données directement avec deux chiffres significatifs dans le deuxième tableau en fin d'énoncé, mais peuvent facilement être calculées avec trois à partir des masses molaires des atomes données dans le premier tableau. Par ailleurs, doit-on lire la masse de 970 kg donnée par l'énoncé comme  $9,7 \cdot 10^2$  kg ou  $9,70 \cdot 10^2$  kg ? L'énoncé donne « environ 970 kg », on peut donc choisir de n'utiliser que deux chiffres significatifs.

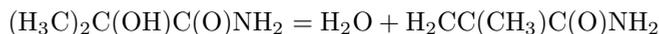
Le rendement de la réaction est donc

$$\eta = \frac{n_{\text{MMA}}}{n_{(\text{H}_3\text{C})_2\text{C}(\text{OH})\text{CN}}} = \frac{m_{\text{MMA}} M_{(\text{H}_3\text{C})_2\text{C}(\text{OH})\text{CN}}}{m_{(\text{H}_3\text{C})_2\text{C}(\text{OH})\text{CN}} M_{\text{MMA}}} = \frac{1000 \times 85 \cdot 10^{-3}}{970 \times 100 \cdot 10^{-3}} = 0,88$$

**I.A.2** La réaction qui prend place dans le réacteur  $\mathbf{R}_1$  est une hydrolyse partielle de la fonction nitrile, dont le bilan est

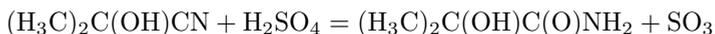


Cette réaction est suivie, dans le réacteur  $\mathbf{R}_2$ , d'une déshydratation de la fonction alcool pour obtenir un alcène, avec pour bilan



En réalité, les fonctions amide du 2-hydroxy-2-méthylpropanamide et du méthacrylamide sont protonées en milieu acide sulfurique concentré, et les composés formés dans les réacteurs  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  sont en réalité  $[(\text{H}_3\text{C})_2\text{C}(\text{OH})\text{C}(\text{O})\text{NH}_3]^+ \text{HSO}_4^-$  et  $[\text{H}_2\text{CC}(\text{CH}_3)\text{C}(\text{O})\text{NH}_3]^+ \text{HSO}_4^-$ .

Notons également que la provenance de l'eau réagissant dans le premier réacteur n'est pas claire. Pour s'affranchir de ce réactif, on pourrait donner le bilan de réaction



mais on se trouverait alors embarrassé pour répondre à la prochaine question.

**I.A.3** L'enthalpie standard de réaction  $\Delta_r H_1^\circ$  correspondant à la réaction qui a lieu dans le premier réacteur peut être calculée, grâce à la loi de Hess, à partir des enthalpies de formation des réactifs et produits de cette réaction. On a

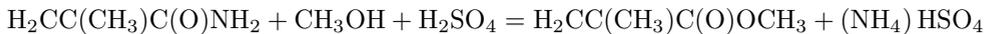
$$\begin{aligned}\Delta_r H_1^\circ &= \Delta_f H^\circ_{(\text{H}_3\text{C})_2\text{C}(\text{OH})\text{C}(\text{O})\text{NH}_2} - \Delta_f H^\circ_{(\text{H}_3\text{C})_2\text{C}(\text{OH})\text{CN}} - \Delta_f H^\circ_{\text{H}_2\text{O}} \\ &= -470 + 120 + 290 = -60 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

La réaction est **exothermique**, et le contenu du réacteur **R<sub>1</sub>** doit donc être **refroidi** pour maintenir une température constante.

**I.A.4** L'hypothèse la plus vraisemblable pour l'utilisation des deux réacteurs successifs est que les conditions optimales de température sont différentes pour les deux étapes de la réaction.

Une élimination en continu de l'eau du deuxième réacteur pour l'introduire dans le premier aurait pour effet de déplacer les équilibres des deux réactions. Toutefois, en l'absence d'indication en ce sens sur la figure C, cette hypothèse ne peut être proposée ici.

**I.A.5** Le bilan de la réaction prenant place dans le réacteur **R<sub>3</sub>** est



Il rend compte de l'obtention du MMA et de l'hydrogénosulfate d'ammonium en sortie du réacteur **R<sub>3</sub>**. L'utilisation d'un excès d'acide sulfurique, démontré à la question I.A.1, garantit la formation des espèces protonées  $\text{NH}_4^+$  et  $\text{HSO}_4^-$  et non de leurs bases conjuguées respectives. Elle explique aussi la présence d'acide sulfurique dans l'effluent, tandis que l'excès de méthanol explique la présence de cette dernière espèce dans l'effluent. Enfin, la présence d'eau est liée à la réaction qui a lieu dans le réacteur **R<sub>2</sub>** (question I.A.2).

**I.A.6** D'après le bilan de la réaction qui a lieu dans le réacteur **R<sub>3</sub>**, indiqué à la question I.A.5, une mole de méthanol est consommée pour chaque mole de MMA produite. Le débit molaire de méthanol réagissant est donc égal au débit molaire sortant de MMA

$$D_{\text{mol, MMA}} = \frac{0,56 D_A}{M_{\text{MMA}}}$$

ce qui permet de calculer le débit massique de méthanol réagissant

$$D_{\text{réaction}} = 0,56 \frac{D_A M_{\text{CH}_3\text{OH}}}{M_{\text{MMA}}}$$

Le débit entrant de méthanol est ainsi

$$D_{\text{entrant}} = D_{\text{réaction}} + D_{\text{sortie}} = 0,56 D_A \frac{M_{\text{CH}_3\text{OH}}}{M_{\text{MMA}}} + 0,36 D_A$$

$$D_{\text{entrant}} = \left( 0,56 \frac{M_{\text{CH}_3\text{OH}}}{M_{\text{MMA}}} + 0,36 \right) D_A$$

$$\text{Finalement, } D_{\text{entrant}} = \left( 0,56 \frac{32,0}{100} + 0,36 \right) \times 2100 = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{h}^{-1}$$

## Mines Physique 1 PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

---

Ce sujet porte sur un nouveau composant qui pourrait prochainement révolutionner les capacités de stockage de l'information : le memristor, sorte de résistance à effet mémoire.

- La première partie s'intéresse d'abord aux propriétés des memristors du point de vue de l'électrocinétique : quelle est l'unité d'une memristance ? comment s'exprime la memristance d'une association série ou parallèle de memristors ? Le candidat est ensuite invité à se pencher sur la caractéristique de ce dipôle pour expliquer l'effet de mémoire permanente. Si les premières questions de cette partie sont assez faciles, il n'en va pas de même pour les dernières, qui reposent sur l'analyse d'une caractéristique non linéaire.
- La deuxième partie porte sur l'étude d'un écoulement visqueux en régime laminaire, en géométrie cylindrique. L'idée est de retrouver la loi de Poiseuille dans un tuyau et d'en déduire l'expression de la résistance hydraulique. S'ensuivent des questions sur des systèmes décrits par des formules analogues dans d'autres domaines de la physique (la thermodynamique et l'électrocinétique). Ces analogies permettent d'interpréter une propriété des memristors. Les premières questions sont peu guidées mais restent proches du cours.
- C'est l'étude de l'équation du mouvement des porteurs mobiles dans un conducteur qui ouvre la troisième partie. En s'appuyant sur le modèle de Drude, on analyse successivement leur comportement vis-à-vis d'une tension continue, puis sinusoïdale. Cette approche débouche naturellement sur une analyse des transferts énergétiques de la source de tension vers les porteurs mobiles. L'effet mémoire du memristor étant dû à la migration de lacunes, qui peut également être décrite par le modèle de Drude, on s'appuie sur les résultats précédents pour interpréter le comportement du memristor. Cette partie est très classique, bien que quelques questions demandent de l'intuition.

Alternant des questions faciles, très classiques, et d'autres beaucoup plus délicates par leur formulation ou par les capacités d'analyse qu'elles requièrent, ce sujet est déroutant dès les premières questions. Il faut savoir surmonter la première impression et ne pas se laisser déstabiliser pour pouvoir progresser. Une bonne maîtrise du cours suffit en réalité à réussir l'essentiel de l'épreuve.

## INDICATIONS

### Partie I

- 5 Considérer l'association série de deux memristors. Exprimer la memristance du memristor équivalent en utilisant l'additivité des tensions. Procéder de manière analogue pour l'association parallèle (cette fois, en utilisant la loi des nœuds).
- 6 Ne pas oublier la condition initiale : en  $t = 0$ ,  $q = 0$ .
- 8 Pour une même valeur de  $i$ , deux valeurs de  $u$  peuvent être observées. Chacune correspond à un régime de fonctionnement. Pour trouver lequel est plutôt bloqué, comparer les pentes en chaque valeur, qui renseignent sur la résistance.
- 10 Pour répondre à cette question, il faut se rappeler que  $M$  dépend de  $q$ . Une fois  $i$  coupé,  $M(q)$  conserve la même valeur qu'avant coupure.
- 13 Utiliser  $E_0 \ell = u$  et  $j_0 S = i$ .
- 15 Montrer que  $\underline{Z} = R_0 (1 + j\tau\omega)$ . Quelle est l'association de deux composants simples qui conduit à la même impédance ?
- 16 La puissance exercée par la force de Lorentz électrique sur une particule est égale au produit scalaire entre la vitesse de cette particule et la force. Pour trouver la puissance volumique, il faut prendre en compte le nombre de porteurs mobiles par unité de volume, qui est lié à  $n$ .
- 17 Utiliser  $E_0 \ell = u$  et  $j_0 S = i$ .

### Partie II

- 25 Sur la caractéristique, la pente de la courbe  $u(i)$  change, cela signifie que la résistance change également.

### Partie III

- 26 Le film d'oxyde de titane peut être vu comme l'association en série de deux résistances, l'une modélisant la zone dopée et l'autre, la zone non dopée.
- 27 Pour l'interprétation, utiliser l'analogie avec la formule  $\vec{v} = \mu \vec{E}_0$ .
- 28 Remarquer que  $Q_{\min}$  correspond à  $z_0 \rightarrow 0$  et  $z \rightarrow \ell$ .
- 29 La memristance est la résistance du film.

# LES MEMRISTORS

## I. GÉNÉRALITÉS SUR LES MEMRISTORS

**1** Rassemblons les relations demandées dans un tableau, où la résistance **R** s'exprime en ohms, la capacité **C** en farads, l'inductance **L** en henrys :

lien	résistor	condensateur	bobine
<b>(1)</b>	$\times$	$q = C u$	$\times$
<b>(2)</b>	$u = R i$	$i = C \frac{du}{dt}$	$u = L \frac{di}{dt}$
<b>(3)</b>	$\times$	$\times$	$\phi = L i$

**2** Comme l'intensité  $i$  du courant électrique est un débit de charges,

$$i = \frac{dq}{dt}$$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Appliquons le théorème de Stokes sur le contour orienté  $\mathcal{C}$  défini par la portion de circuit électrique aux bornes de laquelle  $u$  est appliqué. Alors,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_{S_{\mathcal{C}}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

où  $S_{\mathcal{C}}$  est une surface s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ . Permutons la dérivation sur le temps et l'intégration sur l'espace :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \left( \iint_{S_{\mathcal{C}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

Le membre de gauche est égal à  $-u$  (en convention récepteur). L'intégrale dans le membre de droite est égale au flux du champ magnétique  $\phi$  à travers le circuit. Ainsi,

$$u = \frac{d\phi}{dt}$$

**3** Différentions les réponses de la question 1 :

lien	<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>
formule	$dq = C du$	$du = R di$	$d\phi = L di$

Les deux autres relations sont obtenues à l'aide des réponses de la question 2,

lien	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
formule	$dq = i dt$	$d\phi = u dt$

**4** D'après la définition proposée,

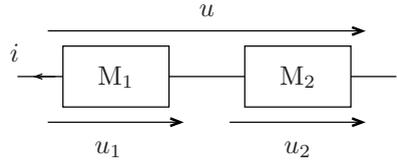
$$[M] = \left[ \frac{d\phi}{dq} \right] = \left[ \frac{u dt}{i dt} \right]$$

Comme  $\left[ \frac{u}{i} \right] = [R]$ ,

**M s'exprime en ohms.**

5] La configuration série est décrite par le schéma électrique ci-contre. Par additivité des tensions,

$$u = u_1 + u_2$$



D'après la relation (5), on en déduit que

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt}$$

donc

$$M \frac{dq}{dt} = M_1 \frac{dq_1}{dt} + M_2 \frac{dq_2}{dt}$$

Comme

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt}$$

il s'ensuit que

Pour une association série,  $M = M_1 + M_2$ .

La configuration parallèle est décrite par le schéma électrique ci-contre. D'après la loi des nœuds,

$$i = i_1 + i_2$$

soit

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt}$$

d'où

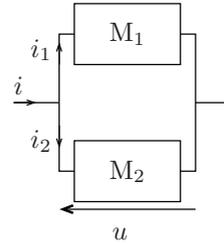
$$\frac{1}{M} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{M_1} \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{1}{M_2} \frac{d\phi_2}{dt}$$

Comme

$$u = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d\phi_2}{dt}$$

il vient

Pour une association parallèle,  $\frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$ .



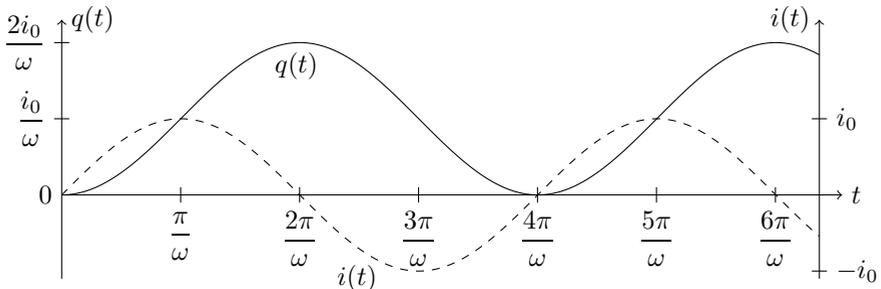
6] Puisqu'on connaît  $i(t)$  et que  $dq = i dt$ , intégrons pour obtenir  $q(t)$  :

$$\int_{q(0)}^{q(t)} dq = \int_0^t i(\tau) d\tau = \left[ -\frac{i_0}{\omega} \cos \omega \tau \right]_{\tau=0}^t$$

D'après les données,  $q(0) = 0$ , si bien que

$$q(t) = \frac{i_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$

La charge  $q(t)$  oscille sinusoidalement autour de la valeur moyenne  $i_0/\omega$  avec l'amplitude  $i_0/\omega$ . La fonction  $q(t)$  a même pulsation que  $i(t)$ , atteint sa valeur moyenne chaque fois que  $i(t)$  est extrémale et est extrémale chaque fois que  $i(t)$  s'annule. On obtient le graphe suivant :



## Mines Physique 2 PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Maimbourg (agrégé de physique) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Jean-Julien Fleck (professeur en CPGE).

---

Ce sujet traite de quelques phénomènes physiques concernant notre étoile, le Soleil. Il comporte trois parties indépendantes.

- La première partie s'intéresse à la surface du Soleil et propose en particulier une étude des taches solaires. On montre que ces taches sont dues à la présence d'un champ magnétique local qui a pour effet de diminuer la température de surface. Cette diminution de température entraîne également la diminution du flux radiatif local, ce qui explique que les taches solaires apparaissent plus sombres.
- La deuxième partie, la plus longue, étudie l'existence d'ondes acoustiques de volume dans le Soleil. Elle est divisée en deux sous-parties. La première, facile, propose d'établir l'équation d'onde acoustique dans un modèle unidimensionnel puis de montrer que des conditions aux limites imposées conduisent à l'obtention d'ondes stationnaires. La seconde étudie l'existence d'ondes acoustiques stationnaires s'établissant dans le volume du Soleil. Le Soleil étant sphérique, les modes propres sont plus difficiles à étudier. L'énoncé propose une relation de dispersion dont on étudie les différents cas limites. Enfin, les résultats théoriques obtenus sont utilisés afin d'interpréter les variations de la luminosité solaire au cours du temps. Cette section est difficile et demande une très bonne maîtrise de la notion de relation de dispersion. Elle s'écarte souvent du programme de PC.
- La troisième partie, la plus facile, cherche à estimer la température, la pression et la densité au centre du Soleil. Ces grandeurs n'étant pas mesurables directement, on ne peut qu'estimer leurs valeurs à partir d'un modèle. Le plasma constituant le Soleil est ici modélisé par une équation d'état polytropic où la pression évolue en puissance de la densité. On démontre dans ce cadre l'équation dite de Lane-Emden à partir de l'équation de la statique des fluides, qui est utilisée dans un cadre original puisque ni la densité ni l'accélération de la pesanteur ne sont constantes.

Ce sujet est plutôt court mais particulièrement difficile. Il s'éloigne très souvent du cours et exige d'avoir assimilé en profondeur les notions afin de les mobiliser dans un contexte nouveau et non conventionnel. Cependant, l'indépendance des parties offrait aux candidats plusieurs points d'entrée dans le sujet. Le fait que la dernière partie soit la plus facile rappelle qu'il est toujours judicieux de lire complètement le sujet au début de l'épreuve. Les principaux chapitres abordés sont l'électromagnétisme, la thermodynamique, la propagation des ondes acoustiques et, dans une moindre mesure, la dynamique des fluides.

## INDICATIONS

### Partie I

- 2 Pour la seconde partie de la question, utiliser l'équation de Maxwell-Ampère pour exprimer la densité de courant en fonction du champ magnétique.
- 3 Par analogie avec la démonstration de l'équation d'Euler, appliquer le principe fondamental de la dynamique sur une particule fluide.
- 7 Utiliser l'expression établie à la question 2 de la force exercée sur un volume élémentaire traversé par une densité de courant  $\vec{j}$  et soumis à un champ magnétique  $\vec{B}$ . On rappelle que deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

### Partie II

- 12 Une onde acoustique peut exister dans un milieu si elle peut s'y propager, c'est-à-dire si son vecteur d'onde présente une partie réelle non nulle.
- 13 La propagation de l'onde acoustique est supposée linéaire. La fréquence de l'onde est alors invariante par translation selon  $r$ . La fréquence propre  $f_{n,p}$  peut donc être « sortie » de l'intégrale radiale.
- 17 Exprimer la pulsation  $\omega$  en fonction des vecteurs d'onde radial  $k_r$  et orthoradial  $k_h$ . En se plaçant à la limite basse fréquence, montrer que la vitesse de groupe est purement orthoradiale.

### Partie III

- 19 Écrire l'expression des forces d'interaction gravitationnelle et électrostatique et en déduire une analogie entre les grandeurs physiques. En déduire alors l'expression du théorème de Gauss gravitationnel par analogie avec le théorème de Gauss électrostatique.
- 21 La masse  $M$  en  $r + dr$  peut s'écrire

$$M(r + dr) = M(r) + dm$$

avec  $m$  la masse de la calotte sphérique comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ .

- 23 Appliquer l'équation de l'équilibre hydrostatique à la surface du Soleil.
- 25 La masse d'un électron est environ 1 800 fois plus faible que celle d'un proton. Leur contribution en masse peut donc être négligée.

# VOYAGE AU CŒUR DU SOLEIL

## I. LA SURFACE DU SOLEIL

**1** La luminosité  $L_{\odot}$  du Soleil est l'intégrale du flux radiatif surfacique sur la sphère  $\mathcal{S}$  de rayon  $R_{\odot}$  et de température  $T_s$ . Le flux radiatif étant supposé constant sur toute la surface, il vient

$$L_{\odot} = \iint_{\mathcal{S}} \phi \, dS = \sigma T_s^4 4\pi R_{\odot}^2$$

Effectuons l'application numérique associée.

$$L_{\odot} = 6 \cdot 10^{-8} \cdot (1000^{1/4} \cdot 10^3)^4 \cdot 4\pi \cdot (7 \cdot 10^8)^2 = 6 \cdot 10^{-8} \cdot 1000 \cdot 10^{12} \cdot 4\pi \cdot 49 \cdot 10^{16} \simeq 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

**2** Considérons un ensemble de charges indicées par  $i$ , de densité volumique  $n_i$ , de charge  $q_i$  et se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}_i$ . Le courant associé  $\vec{j}_i$  s'écrit

$$\vec{j}_i = n_i q_i \vec{v}_i$$

Ainsi, par additivité des courants, le courant total  $\vec{j}$  s'écrit

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^N n_i q_i \vec{v}_i$$

Le champ électrique étant supposé nul, la force de Lorentz se réduit ici à sa composante magnétique. Évaluons la force de Lorentz  $d\vec{F}$  s'exerçant sur un volume  $d\tau$  de plasma. La force étant également une grandeur additive,  $d\vec{F}$  s'écrit comme la somme des forces  $d\vec{F}_i$  associées à chacun des types de charge  $q_i$ .

$$d\vec{F} = \sum_{i=1}^N d\vec{F}_i$$

Par ailleurs, la force de Lorentz magnétique  $d\vec{F}_i$  s'écrit, avec  $n_i q_i d\tau$  la charge totale contenue dans  $d\tau$ ,

$$d\vec{F}_i = n_i q_i d\tau \vec{v}_i \wedge \vec{B}$$

Finalement,

$$d\vec{F} = \left( \sum_{i=1}^N n_i q_i \vec{v}_i \right) \wedge \vec{B} \, d\tau$$

soit, en identifiant la densité de courant  $\vec{j}$ ,

$$d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} \, d\tau$$

En absence de champ électrique, l'équation de Maxwell-Ampère se réduit à

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

si bien que

$$d\vec{F} = \frac{\text{rot } \vec{B}}{\mu_0} \wedge \vec{B} \, d\tau$$

L'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques est fournie en fin d'énoncé. Ainsi, avec  $\vec{B} = B(r) \vec{u}_z$ ,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{B} &= -\frac{dB}{dr} \vec{u}_\theta \\ d\vec{F} &= -\frac{d\tau}{\mu_0} \frac{dB}{dr} B(r) \vec{u}_r \\ d\vec{F} &= -\frac{d\tau}{\mu_0} \frac{d}{dr} \left( \frac{B^2}{2} \right) \vec{u}_r\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{d\vec{F} = -\operatorname{grad}(\varepsilon) d\tau \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Cette écriture montre que  $d\vec{F}$  est une force conservative car elle dérive d'une énergie potentielle. Ici,  $B^2/2\mu_0$  est l'énergie magnétique volumique.

**3** Considérons la particule de plasma de volume  $d\tau$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel supposé galiléen et fixe par rapport à la surface du Soleil. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à cette particule. Par analogie avec l'équation d'Euler de la mécanique des fluides,

$$\rho_S \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \vec{f}_V$$

avec  $\vec{f}_V$  l'ensemble des forces volumiques s'exerçant sur la particule fluide. Dans le cas présent, les forces volumiques sont le poids et la force d'origine magnétique calculée à la question précédente. De plus, en se plaçant à proximité de la surface du Soleil,  $\rho_S$  et  $g$  sont indépendants de  $z$ . La force volumique totale s'écrit alors

$$\vec{f}_V = -\operatorname{grad} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} + \rho_S gz \right)$$

Par ailleurs, on se place d'après l'énoncé à l'équilibre hydrostatique, si bien que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

Finalement, 
$$\operatorname{grad} \left( \frac{B^2(r)}{2\mu_0} + p(r, z) + \rho_S gz \right) = 0$$

Soit encore, 
$$\frac{B^2(r)}{2\mu_0} + p(r, z) + \rho_S gz = C^{\text{te}}$$

En se limitant à des cas proches de la surface, donc à  $z = C^{\text{te}}$ , le terme  $\rho_S gz$  est constant, si bien que

$$\boxed{\frac{B^2(r)}{2\mu_0} + p(r, z) = C^{\text{te}'}}$$

En considérant un champ magnétique nul à l'extérieur d'une tache solaire, il vient

$$p_{\text{ext}} = p_{\text{int}} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

d'où

$$\boxed{p_{\text{int}} = p_{\text{ext}} - \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

## Mines Chimie PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Augustin Long (ENS Lyon) et Claire Besson (docteur en chimie).

---

Cette épreuve est composée, comme toujours aux Mines, de deux problèmes, l'un de chimie générale ayant pour thème l'indium, et l'autre de chimie organique développant la synthèse d'un stéroïde anabolisant.

- Le premier problème étudie l'I.T.O. (*Indium Tin Oxide*, oxyde d'indium dopé à l'étain), matériau constituant la principale utilisation de l'indium pour fabriquer des couches minces qui servent notamment d'électrode transparente dans les écrans LCD. Ce problème est divisé en trois parties. On étudie dans un premier temps la structure cristallographique de l'I.T.O. puis on s'intéresse, à l'aide du diagramme potentiel-pH de l'indium, au traitement acide (lixiviation) des déchets lors du recyclage des écrans LCD usagés. La séparation de l'indium et de l'étain est abordée. La dernière partie, qui s'appuie sur l'étude de plusieurs documents et résultats expérimentaux, concerne le traitement des lixiviats (solutions obtenues à la suite de la lixiviation) dans le but de séparer l'indium de toutes les impuretés métalliques présentes. C'est l'extraction par solvant qui est utilisée ici comme méthode de purification.
- Le second problème étudie la synthèse d'une molécule organique, le tétrahydrogestrinone (THG). Ce dernier est le stéroïde anabolisant de synthèse au cœur d'un scandale de dopage de grande ampleur dans le sport américain, qui a notamment conduit au retrait des médailles olympiques et des titres mondiaux, ainsi qu'à l'incarcération, de la sprinteuse Marion Jones.

La synthèse utilise des réactions classiques du programme de chimie organique, notamment les réactions sur les carbonyles. L'annélation de Robinson permet la construction d'une partie du squelette multicyclique des stéroïdes. De nombreux mécanismes sont demandés. Les réactions étudiées ne présentent pas de difficulté majeure mais aucun intermédiaire, ou presque, n'est donné, ce qui rend le problème assez difficile.

Ce sujet était assez court en comparaison de ce qui se fait habituellement aux Mines. Il n'était donc pas vraiment possible de sauter de nombreuses questions pour continuer à progresser dans le sujet et il fallait au contraire se concentrer pour arriver au cœur des thèmes étudiés. Cette particularité fait de ce sujet un très bon entraînement pour améliorer sa capacité de réflexion.

## INDICATIONS

### Premier problème

- 1 Attention à ne pas oublier les 10 colonnes du bloc *d*.
- 2 Calculer la fraction massique de l'indium dans l'oxyde  $\text{In}_2\text{O}_3$ .
- 4 La structure représentée ne constitue qu'un huitième de la maille.
- 8 Les domaines de l'eau et de l'indium métallique sont disjoints ? Envisager deux formes oxydées selon le pH.
- 10 Utiliser la frontière verticale pour connaître le pH et la concentration  $[\text{In}^{3+}]$ .
- 11 Comparer les constantes d'équilibre pour les dissolutions de l'indium et de l'étain. Les ions chlorure permettent la formation de  $\text{Sn}(\text{OH})\text{Cl}^{2+}$ . Quelle influence cela a-t-il pour la solubilisation non souhaitée de l'étain ?
- 12 Comment varie la solubilisation de l'étain lorsqu'il est sous forme +II par rapport à la situation précédente (+IV) ?
- 14 C'est le signe de  $\Delta_r G_2^\circ$  qu'il faut commenter.
- 16 Comparer les valeurs de *D* dans les documents 3a et 3b.
- 17 Les valeurs de *D* pour le fer et l'étain sont supérieures à 1 d'après le document 4. Quelle en est la conséquence sur l'extraction de ces impuretés ?
- 18 Comparer les valeurs de *D* des différents éléments (document 5) par rapport à 1.
- 19 Utiliser les réponses aux questions 11, 17 et 18 pour proposer un protocole.
- 20 À quel potentiel l'intensité de réduction de l'eau devient non nulle ?
- 22 Le cuivre n'est pas oxydé car son potentiel standard est plus élevé que le potentiel imposé à l'anode.
- 25 L'I.T.O. est en haut dans le diagramme de phase. Envisager une réduction des oxydes par  $\text{CO}_{(g)}$  puis une vaporisation sélective (document 8) et quantitative (document 9).

### Second problème

- 26 La molécule est symétrique.
- 28 La but-3-én-2-one est l'électrophile.
- 29 L'ion énolate formé attaque la cétone conjuguée en 1,4. L'équilibre céto-énolique permet d'obtenir la dicétone finale.
- 30 Il s'agit d'une aldolisation intramoléculaire.
- 31 La réaction est une crotonisation, elle se déroule selon un mécanisme  $\text{E1}_{\text{CB}}$ .
- 32 L'annélation de Robinson correspond à la séquence addition de Michael, cyclisation par aldolisation intramoléculaire puis crotonisation.
- 34 Réaliser une réaction acidobasique entre l'acide carboxylique et l'amine. L'auxiliaire utilisé est chiral, les produits ne sont plus énantiomères.
- 40 Il faut déplacer l'équilibre lors de la réaction d'acétalisation pour avoir un bon rendement.
- 45 L'organomagnésien s'additionne deux fois sur le carbone de la fonction ester.
- 47 L'intermédiaire **18** est issu d'une aldolisation intramoléculaire à partir de **16**. C'est également le produit précédant la crotonisation qui forme **19**.
- 48 On peut oxyder la fonction alcool pour réaliser ensuite une addition nucléophile d'un organomagnésien.

## L'I.T.O.

**1** D'après les règles de Klechkowski, Hund et Pauli, la configuration électronique de l'indium est

$$\text{In}(Z = 49) : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^1$$

Le nombre quantique principal maximum est 5 donc l'indium appartient à la **cinquième période** de la classification. Par ailleurs, l'indium possède 3 électrons de valence : il appartient à la **treizième colonne**.

Attention à ne pas oublier les 10 colonnes du bloc  $d$  dans le décompte du numéro de colonne. C'est une erreur classique.

**2** L'I.T.O est constitué de 90 % d'oxyde d'indium  $\text{In}_2\text{O}_3$  en masse, et 10 % d'oxyde d'étain  $\text{SnO}_2$ . Dans l'oxyde d'indium, la fraction massique de l'indium est

$$w_{\text{In}}(\text{In}_2\text{O}_3) = \frac{2 \times 115}{2 \times 115 + 3 \times 16} \approx 0,8$$

La calculatrice n'étant pas autorisée pour les épreuves des Mines, il est important de savoir réaliser des applications numériques à la main. Le rapport du jury précise tous les ans qu'aucun résultat ne peut être laissé sous forme d'opérations. On détaille en remarque comment on conduit les calculs pour aboutir aux résultats.

$$w_{\text{In}}(\text{In}_2\text{O}_3) = \frac{230}{278} \approx \frac{23}{28} \approx \frac{3}{4} = 0,75$$

Or, 
$$\frac{23}{28} > \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

donc on a sousestimé le résultat. C'est pourquoi on arrondit à un seul chiffre significatif au supérieur :  $w_{\text{In}}(\text{In}_2\text{O}_3) \approx 0,8$ .

La fraction massique globale de l'indium dans l'I.T.O. est donc

$$w_{\text{In}}(\text{ITO}) = 0,8 \times 0,90 \approx 0,7$$

L'I.T.O. contient environ trois quarts d'indium, en masse.

**3** Les atomes d'oxygène occupent des sites tétraédriques dans cette structure donc la coordinence est **4**.

**4** La structure représentée ne correspondant qu'à un huitième de la maille complète, la population d'atomes d'oxygène est

$$Z_{\text{O}} = 6 \times 8 = 48$$

Comme l'oxyde d'indium a pour formule  $\text{In}_2\text{O}_3$ ,

$$Z_{\text{In}} = \frac{2}{3} Z_{\text{O}} = 32$$

**5** La distance  $d$  entre un atome d'oxygène et un atome d'indium correspond au quart de la grande diagonale du cube constituant le huitième de la maille (la structure représentée dans le document). On a donc

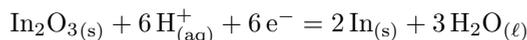
$$d = \frac{1}{4} \left( \frac{a}{2} \sqrt{3} \right) \approx 220 \text{ pm}$$

$$\text{AN:} \quad d = \frac{1}{4} \times 506 \times \frac{7}{4} = 253 \times \frac{7}{8} \approx 220 \text{ pm}$$

En effet, on peut considérer que  $7/8$  est proche de  $85\%$ . La multiplication par  $7/8$  revient donc à enlever  $15\%$ , ce qui donne le  $220$  approximativement.

**6** La distance  $d$  trouvée à la question précédente correspond à la somme des rayons ioniques de l'indium et de l'oxygène. **La liaison ionique est un bon modèle** de l'interaction entre les atomes d'oxygène et d'indium dans cette structure avec **contact entre anions et cations dans le modèle de sphères dures**.

**7** Les droites en pointillés correspondent aux couples de l'eau ; leur pente est de  $-0,06 \text{ V}$ . Pour le couple  $\text{In}_2\text{O}_3/\text{In}$ , la demi-équation électronique s'écrit



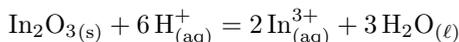
de potentiel de Nernst associé

$$E = E^\circ(\text{In}_2\text{O}_3/\text{In}) + \frac{0,06}{6} \log \frac{[\text{H}^+]^6}{c^{\circ 6}} = E^\circ(\text{In}_2\text{O}_3/\text{In}) - 0,06 \text{ pH (V)}$$

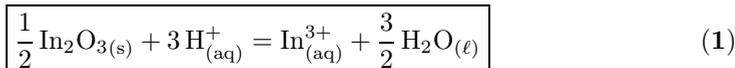
La pente de la droite associée à ce couple est également  $-0,06 \text{ V}$ . C'est cohérent avec le diagramme : les droites sont **parallèles**.

**8** Le domaine de l'indium métallique est disjoint de celui de l'eau à tout pH : **l'indium est instable dans l'eau**. Il est oxydé en ions  $\text{In}^{3+}$  si  $\text{pH} < 3,2$  et en oxyde  $\text{In}_2\text{O}_{3(s)}$  si  $\text{pH} \geq 3,2$ .

**9** En milieu acide, l'oxyde d'indium se solubilise sous forme d'ions  $\text{In}^{3+}$ . L'équation de réaction est



Pour un seul atome d'indium impliqué, la réaction (1) demandée est



**10** À l'équilibre de la réaction (1), on a

$$K_1^\circ = \frac{[\text{In}^{3+}]}{[\text{H}^+]^3} c^{\circ 2}$$

Sur la frontière verticale, on sait que  $\text{pH} = 3,2$  et  $[\text{In}^{3+}] = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ . D'où

$$\boxed{K_1^\circ = \frac{10^{-2}}{10^{-9,6}} = 10^{7,6}}$$

La réaction (1) est **quantitative** ( $K^\circ \gg 1$ ).

**11** Lors de la lixiviation en milieu acide, l'oxyde d'indium se dissout totalement en ions  $\text{In}^{3+}$  (réaction quantitative d'après la question précédente) alors que l'oxyde d'étain +IV ( $\text{SnO}_{2(s)}$ ) ne se dissout presque pas ( $K^\circ = 10^{-6,5}$ ). La séparation est donc très facile, il suffit de filtrer.

Il faut choisir **l'acide sulfurique** car la présence d'ions chlorure augmente la solubilité de l'étain par formation de  $\text{Sn}(\text{OH})\text{Cl}^{2+}$ .

## X Physique A PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Louis Salkin (professeur en CPGE) ; il a été relu par Pierre Tognetti (professeur agrégé) et Tom Morel (professeur en CPGE).

---

Ce sujet s'intéresse au fonctionnement de deux systèmes originaux de catapulte.

- La première partie est consacrée à une catapulte mettant en jeu une conversion d'énergie capillaire en énergie cinétique. Lorsque deux gouttelettes déposées sur une surface hydrophobe coalescent, elles donnent naissance à une unique goutte propulsée verticalement. La prise en compte de frottements visqueux permet alors d'interpréter l'existence d'une taille de goutte présentant une vitesse de propulsion maximale.
- Dans la continuité de la première partie, la deuxième s'intéresse à un autre processus de catapulte capillaire rencontré dans la nature : l'éjection des spores de champignon. Après avoir adapté les résultats de la partie précédente, le mouvement d'une spore suite à son éjection est modélisé, puis le modèle est comparé à une chronophotographie expérimentale.
- La troisième partie propose de comprendre le principe d'une catapulte électromagnétique reposant sur une conversion d'énergie électromagnétique en énergie cinétique. Après avoir exprimé la force permettant de mettre en mouvement le projectile, les questions suivantes visent à optimiser et dimensionner les paramètres de la catapulte dans le but de propulser un objet de masse donnée à une vitesse imposée. Après avoir évoqué les effets thermiques lors du catapultage, on cherche enfin à estimer l'efficacité énergétique de ce dispositif.

Les parties 1 et 2 permettent de revoir efficacement les notions de capillarité et de mécanique des fluides du programme, et ne devraient pas poser de difficulté particulière. En revanche, la partie 3 nécessite un certain recul sur les chapitres d'induction électromagnétique et d'électronique étudiés en PCSI.

Même si le sujet peut sembler court au vu du faible nombre de questions posées, certaines d'entre elles demandent, comme souvent dans cette banque de concours, un réel effort d'initiative, d'autant que peu d'indications ou de résultats intermédiaires sont fournis.

## INDICATIONS

### Partie 1

- 1 Penser à écrire la conservation du volume d'eau au cours de la coalescence pour exprimer  $R'$  en fonction de  $R$ .
- 4 La vitesse s'écrit  $R/\tau$  en loi d'échelle.
- 6 Exprimer la vitesse d'éjection  $V_0$  en fonction de  $R'$  et montrer que celle-ci passe par un maximum pour une valeur particulière  $R'_{\max}$  en annulant sa dérivée première par rapport à  $R'$ .

### Partie 2

- 10 En régime laminaire, le modèle de force de traînée pertinent est

$$\vec{f} = -6\pi\eta_a R_s \vec{v}$$

- 11 Comparer juste après l'éjection de la spore les normes du poids et de la force de frottement pour justifier que la gravité est négligeable.

### Partie 3

- 12 Démontrer l'expression du module de la force  $\vec{F}$  nécessite de mener deux raisonnements parallèles :
  - Décomposer l'énergie du circuit en ses composantes électrique, magnétique et cinétique, puis écrire que sa dérivée temporelle est égale à la puissance dissipée par effet Joule.
  - Exprimer la force électromotrice induite  $e$  puis écrire la loi des mailles dans le circuit électrique équivalent.
- 14 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la partie mobile de masse totale  $m + M$ .
- 16 Pour faciliter l'application numérique, ne pas hésiter à comparer l'ordre de grandeur des différents termes.
- 17 Par définition de l'intensité,  $Q = \int_0^\tau i dt$ .
- 18 Dans cette question et la suivante, supposer que la vitesse du rail mobile est négligeable pour pouvoir simplifier la loi des mailles.
- 22 Appliquer le premier principe de la thermodynamique aux rails en aluminium, en supposant l'absence de transfert thermique pendant la durée de catapultage.

## CATAPULTES

### 1. CATAPULTES CAPILLAIRES

**1** L'énergie de surface des deux gouttes initiales de rayon  $R$  s'exprime

$$E_{s,i} = 2(4\pi R^2\gamma)$$

La coalescence de ces deux gouttelettes donne naissance à une goutte de rayon  $R'$ , dont l'énergie de surface s'écrit

$$E_{s,f} = 4\pi R'^2\gamma$$

La conservation du volume d'eau lors de la coalescence permet de relier  $R'$  et  $R$  :

$$2\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R'^3 \quad \text{soit} \quad R' = 2^{1/3}R$$

La variation d'énergie de surface s'écrit donc

$$\delta E_s = E_{s,f} - E_{s,i} = 4\pi(2^{2/3} - 2)\gamma R^2$$

Cette différence d'énergie de surface est négative, ce qui justifie la mise en mouvement spontanée de la goutte issue de la coalescence, en supposant l'absence de dissipation d'énergie.

**2** Les deux gouttes initiales étant supposées au repos, leur énergie se réduit à leur énergie de surface :  $E_i = E_{s,i}$ . L'énergie de la goutte obtenue après coalescence, de masse  $m'$ , comporte une contribution interfaciale et une contribution cinétique :

$$E_f = E_{s,f} + \frac{1}{2}m'V_0^2$$

Par conservation de la masse d'eau au cours de la coalescence,

$$m' = 2\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)$$

En négligeant toute dissipation d'énergie lors de la coalescence, la conservation de l'énergie s'écrit  $E_i = E_f$ , soit

$$-\delta E_s = \frac{4}{3}\pi R^3\rho V_0^2$$

Avec la question 1,

$$3(2 - 2^{2/3})\gamma = \rho R V_0^2$$

Finalement,

$$V_0 = \sqrt{\frac{3(2 - 2^{2/3})\gamma}{\rho R}} = 3 \cdot 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}$$

**3** La goutte propulsée verticalement atteint sa hauteur maximale lorsque son énergie cinétique s'annule. En supposant qu'elle reste sphérique au cours de son mouvement et que la friction de l'air est négligeable, la conservation de son énergie s'écrit

$$\frac{1}{2}m'V_0^2 = m'gh$$

Il vient

$$h = \frac{V_0^2}{2g} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

La hauteur obtenue est tout à fait observable à l'œil nu et de l'ordre de grandeur de la taille de la goutte : ce résultat est conforme à la séquence expérimentale présentée à la figure 1.

**4** En ignorant tout préfacteur numérique, la question 1 a permis de montrer que la diminution d'énergie de surface au cours de la coalescence est de l'ordre de  $\gamma R^2$ . Cette diminution d'énergie de surface est à l'origine de la mise en mouvement d'une masse  $m' \propto \rho R^3$  de liquide, se déplaçant sur une distance de l'ordre de  $R$  pendant le temps caractéristique  $\tau$ . Ce temps typique est déterminé en écrivant, comme à la question 2, la conversion d'énergie interfaciale en énergie cinétique :

$$\gamma R^2 \propto \rho R^3 \left( \frac{R}{\tau} \right)^2$$

d'où

$$\tau \propto \sqrt{\frac{\rho R^3}{\gamma}}$$

Avec  $R = 1 \text{ mm}$ ,

$$\tau = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

**5** D'après la question précédente, la goutte obtenue après coalescence se déforme sur une distance typique  $R$  pendant le temps caractéristique  $\tau$ . Approximons le terme de cisaillement apparaissant dans la puissance visqueuse volumique :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \propto \frac{R/\tau}{R} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho R^3}}$$

Intégrons la puissance volumique dissipée sur le volume de la goutte, de l'ordre de  $R^3$  d'après la question 1,

$$P \propto \eta \left( \sqrt{\frac{\gamma}{\rho R^3}} \right)^2 R^3 = \frac{\eta \gamma}{\rho}$$

L'énergie dissipée pendant le temps typique de déformation  $\tau$  est  $E_d = P \tau$ , d'où

$$E_d \propto \frac{\eta \gamma}{\rho} \tau = \eta \sqrt{\frac{\gamma R^3}{\rho}}$$

**6** La variation d'énergie au cours de la coalescence s'écrit

$$E_f - E_i = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho V_0^2 + 4\pi (2^{2/3} - 2) \gamma R^2$$

À la lecture de l'énoncé, remplaçons  $R$  au moyen de  $R'$  en appliquant la relation établie à la question 1 :

$$E_f - E_i = \frac{2}{3} \pi R'^3 \rho V_0^2 + 4\pi (1 - 2^{1/3}) \gamma R'^2$$

En tenant à présent compte des effets visqueux, cette différence d'énergie correspond à l'énergie dissipée en vertu du théorème de l'énergie mécanique, soit

$$\frac{2}{3} \pi R'^3 \rho V_0^2 + 4\pi (1 - 2^{1/3}) \gamma R'^2 = -36 \pi \eta \sqrt{\frac{\gamma R'^3}{\rho}}$$

d'où

$$R'^3 \rho V_0^2 = 6 (2^{1/3} - 1) \gamma R'^2 - 54 \eta \sqrt{\frac{\gamma R'^3}{\rho}}$$

En isolant la vitesse,

$$V_0 = \sqrt{\frac{6 (2^{1/3} - 1) \gamma}{\rho R'} - 54 \eta \sqrt{\frac{\gamma}{\rho^3 R'^3}}}$$

## X/ENS Physique B PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Amélie Gay (ENS Lyon) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

---

Ce problème porte sur la physique des plasmas. Les questions sont réparties en deux parties relativement indépendantes.

- La première partie est consacrée à la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma soumis à un champ magnétique constant. On montre qu'il existe un domaine de pulsations interdites où la propagation ne peut se faire. Cette partie repose essentiellement sur des raisonnements similaires à ceux du cours sur la propagation d'une onde dans un plasma : relation de dispersion, vitesse de phase, atténuation et dispersion...
- La seconde partie traite de la propagation de deux ondes électromagnétiques dont l'une a une fréquence dans le domaine interdit. Cette partie, moins calculatoire, fait surtout appel à la compréhension du phénomène étudié. Il s'agit dans un premier temps d'adapter les résultats de la première partie puis d'interpréter les phénomènes qui apparaissent.

De longueur raisonnable pour une épreuve X/ENS, ce sujet ne présente pas de difficulté majeure. Il sera utile pour réviser et approfondir les idées et raisonnements du cours sur la propagation d'ondes dans un plasma. Il permet aussi de s'entraîner à faire des applications numériques en ordre de grandeur car les calculatrices étaient interdites pendant l'épreuve.

**INDICATIONS****Partie 1**

- 3 La longueur de Landau correspond à la distance à partir de laquelle les interactions électrostatiques sont ressenties par les particules.
- 5 Utiliser la formule de De Broglie.
- 6 Le milieu de propagation est constitué des ions d'argon.
- 8 Calculer la partie réelle du champ électrique.
- 13 Écrire les deux équations projetées en notation complexe.
- 14 La relation entre la puissance et l'amplitude du champ électrique est

$$P = \frac{1}{2} S \varepsilon_0 c E_0^2$$

- 18 Utiliser l'expression de la vitesse complexe obtenue à la question 13.
- 20 La propagation de l'onde est impossible si  $\overline{k^2} < 0$ .
- 21 Déterminer l'expression complexe de  $k$ .

**Partie 2**

- 24 Le vecteur  $n(z, t) \vec{v}_P$  ne dépend que de la variable  $z$  et n'a des composantes que selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ . Ainsi

$$\operatorname{div} (n(z, t) \vec{v}_P) = 0$$

- 25 Écrire l'équation de Maxwell-Gauss.
- 29 Le mouvement transverse est caractérisé par  $v_+$  et  $v_-$ .
- 33 Regarder l'évolution de la tangente à la courbe pour avoir des informations sur la vitesse de groupe.

## TRANSPARENCE ÉLECTROMAGNÉTIQUEMENT INDUITE DANS UN PLASMA FROID MAGNÉTISÉ

### 1. PROPAGATION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN PLASMA FROID MAGNÉTISÉ

**1** Les électrons ont une masse négligeable devant celle des ions d'argon. On peut donc **négliger** le mouvement des ions devant celui des électrons.

**2** L'énergie d'agitation thermique vaut  $k_B T$ . La définition de la longueur de Landau  $r_L$  impose la relation

$$k_B T = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi \varepsilon_0 r_L}$$

L'énergie du système est celle de l'interaction entre un électron de charge  $-e$  et un ion argon de charge  $+e$ . Il vient

$$r_L = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 k_B T} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

**3** La distance moyenne  $\ell$  entre deux particules est directement liée à la densité volumique  $n_0$  par

$$\ell = \frac{1}{n_0^{1/3}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

D'après sa définition, la longueur de Landau correspond à la distance caractéristique en dessous de laquelle les particules ressentent l'interaction électrostatique. D'après la question 2,  $r_L \ll \ell$  : les électrons sont donc suffisamment éloignés les uns des autres. Par conséquent,

Les collisions peuvent être négligées.

Donnons quelques ordres de grandeur de la densité volumique des plasmas courants :

- Vent solaire :  $10^7 \text{ m}^{-3}$  ;
- Couronne solaire :  $10^{14} \text{ m}^{-3}$  ;
- Plasma de fusion (Tokamak) :  $10^{21} \text{ m}^{-3}$  ;
- Intérieur du Soleil :  $10^{32} \text{ m}^{-3}$ .

**4** Par définition,  $k_B T = \frac{1}{2} m u^2$

d'où

$$u = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}} = 5 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

Comme  $u \ll c$ ,

L'hypothèse non relativiste est justifiée.

**5** L'énergie cinétique  $E_c$  peut s'écrire avec la quantité de mouvement  $p = mv$  :

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

Notons  $\lambda$  la longueur d'onde de De Broglie. Avec la formule de De Broglie  $p = h/\lambda$ ,

$$E_c = \frac{h^2}{2m \lambda^2}$$

Puisque  $E_c = k_B T$ ,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m k_B T}} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Comparons cette valeur à la distance moyenne  $\ell$  calculée à la question 3. On a  $\lambda \ll \ell$  : les particules apparaissent alors localisées les unes par rapport aux autres.

Le problème peut être traité classiquement.

**6** Le son se propage par l'intermédiaire des ions d'argon qui sont plus massifs que les électrons. D'après l'énoncé, la vitesse du son  $c_s$  vaut

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{M}} = 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

En utilisant la question 4,

$$c_s \ll u$$

Cette inégalité est cohérente avec le résultat de la question 1 où les ions sont supposés immobiles donc

Les ondes acoustiques peuvent être négligées.

Il y a une ambiguïté de l'énoncé. En effet, il ne s'agit pas de la propagation du son dans le gaz d'électrons mais dans le plasma.

**7** Utilisons l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La notation complexe permet d'écrire cette relation sous la forme

$$-i \vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$$

La notation  $\vec{B}$  désigne le champ magnétique en représentation complexe. On a alors

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{k}{\omega} \vec{e}_z \wedge \vec{E} \\ &= \frac{k E_0}{\omega} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_z \wedge (\vec{e}_x - i \vec{e}_y) \\ \vec{B} &= \frac{k E_0}{\omega} e^{i(\omega t - kz)} (\vec{e}_y + i \vec{e}_x) \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{B} = \mathcal{R} \left\{ \frac{k E_0}{\omega} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \right\}$$

## X/ENS Chimie PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Augustin Long (ENS Lyon) ; il a été relu par Claire Besson (docteur en chimie) et Laure-Lise Chapellet (docteur en chimie).

---

Le sujet se compose de deux problèmes indépendants portant sur la chimie organique pour le premier, sur la chimie générale pour le second.

Le premier problème s'intéresse au glucose, à ses propriétés et à ses dérivés. Il est composé de trois sous-parties indépendantes :

- On commence par étudier l'équilibre entre les différentes formes cycliques par suivi en polarimétrie.
- On aborde ensuite la synthèse de composés chiraux à partir de dérivés du glucose. Cette partie est l'occasion d'utiliser des réactions classiques, de réaliser un modèle d'approche avec des molécules simples pour déterminer le produit d'une réaction de Diels-Alder et d'exploiter de façon approfondie un spectre RMN d'un composé chiral.
- Enfin, l'étude de polymères à base de glucose et de leurs propriétés mécaniques est abordée par l'exploitation de données expérimentales.

Le second problème étudie les tensioactifs, molécules composées de deux parties aux polarités différentes : une tête polaire hydrophile et une queue apolaire lipophile.

- Un modèle simplifié de formation de micelles est décrit à l'aide de considérations géométriques et thermodynamiques. On calcule ensuite la concentration micellaire critique à l'aide de résultats expérimentaux de conductimétrie et d'absorption UV-visible.
- L'utilisation des tensioactifs pour stabiliser des émulsions, comme l'émulsion d'eau et d'huile, est ensuite étudiée par l'intermédiaire d'un facteur empirique lié à la structure du tensioactif.
- Enfin, c'est l'activité catalytique des tensioactifs qui est étudiée. Un cycle catalytique d'oxydation d'alcènes en aldéhydes par le procédé Wacker est présenté. L'utilisation de microémulsions lors de cette catalyse permettant une accélération de la réaction est discutée.

Les thèmes abordés dans ce sujet sont très variés ; la difficulté des questions reste dans l'ensemble raisonnable. Le sujet repose beaucoup sur l'analyse de documents et de données expérimentales. Il contient également de nombreuses questions de cours, notamment dans le problème de chimie organique. Il fallait prendre le temps de bien comprendre les différents modèles pour traiter le second problème. Quelques questions compliquées permettaient de départager les meilleurs candidats. Notons enfin que les calculatrices étaient interdites et qu'il fallait donc faire les applications numériques en considérant des ordres de grandeur.

## INDICATIONS

### Premier problème

- 1.2 Faire un bilan des groupes en positions axiales et équatoriales.
- 1.5 Il s'agit du mécanisme d'addition d'un alcool sur un carbonyle en milieu acide.
- 1.7 Exprimer les angles de déviation à l'instant initial. En déduire l'angle final en fonction de ces valeurs et de la proportion en un des deux isomères.
- 2.1.2 Le but de cette étape est de réaliser la protection d'un diol.
- 2.1.6 Comparer le pKa de l'hydrure avec celui de l'alcool.
- 2.1.7 Ne pas oublier le rôle d'activateur de la pyridine.
- 2.1.8 Discuter des effets électroniques des substituants.
- 2.1.9 L'approche favorable est celle présentant des interactions secondaires stabilisantes. Une erreur est présente dans la structure du produit **B** qui contient un atome de carbone de trop.
- 2.1.10 Identifier la face encombrée par les substituants équatoriaux.
- 2.2.2 Penser aux conséquences stéréochimiques de la  $S_N2$ .
- 2.2.3 Le composé étant bicyclique, un des deux acétals n'est pas affecté par la séquence réactionnelle.
- 3.3 Identifier les interactions intermoléculaires entre brins.
- 3.6 Le module d'Young  $E$  est la pente de la partie linéaire aux faibles déformations.

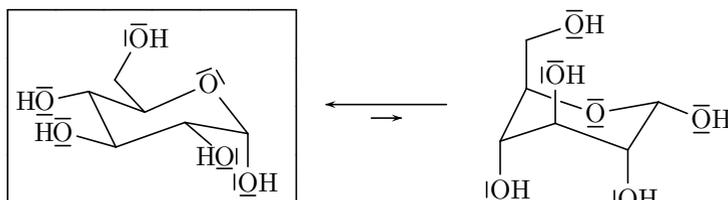
### Deuxième problème

- 4.2.1 Les micelles n'apparaissent qu'une fois [CMC] atteinte, et il est impossible d'avoir plus de molécules de  $SD^-$  libres que cette concentration critique.
- 4.2.3 La surface du cône prend aussi en compte les sphères électroniques des oxygènes. Selon les approximations effectuées, une valeur entre 6 et 9 peut être trouvée.
- 4.2.7 Choisir la concentration adéquate et discuter de l'ordre de grandeur de  $N$ .
- 4.3.2 Comparer la contribution de  $N$  molécules de  $SD^-$  libres à celle de molécules engagées dans une micelle.
- 4.3.4 Écrire la conservation de la matière en  $Na^+$  et en  $SD^-$ .
- 4.3.7 Identifier une interaction intramoléculaire susceptible de stabiliser une forme, puis discuter de son importance en fonction du solvant.
- 4.3.8 Discuter du comportement du BZA en fonction de la concentration en tensioactifs, et par rapport à [CMC].
- 5.1 Rappeler le lien vu en cours de physique entre la modification d'énergie du système et la variation d'aire de contact entre deux phases non miscibles.
- 5.3 Les valeurs de EHL obtenues pour le CTAB et le Triton X-100 ne permettent pas de répondre directement à la question : certaines valeurs du tableau 1 sont différentes de celles de la littérature et quelques erreurs semblent s'y trouver.
- 6.4 Identifier l'alcène subissant la réaction d'oxydation en dérivé carbonylé.
- 6.5 Expliquer les interactions qui ont lieu entre les orbitales HO et BV de l'éthène et les orbitales appropriées du métal : quelle est l'influence sur la densité électronique et la force de la liaison double ?
- 6.6 Commenter la polarité et la solubilité de l'alcène et des différents composés du cycle catalytique dans l'eau et en phase organique, et en déduire l'intérêt d'augmenter la surface de contact entre les deux phases.

## LE GLUCOSE EN SYNTHÈSE ET CHIMIE DES POLYMÈRES

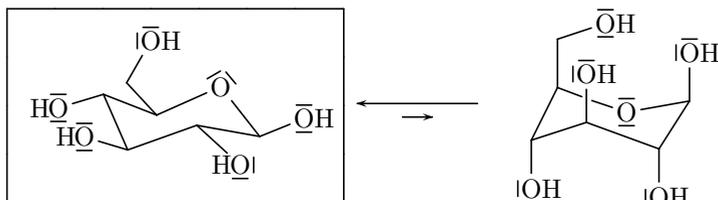
**1.1** La formule brute des oses s'écrit  $C_nH_{2n}O_n$ , soit formellement  $C_n(H_2O)_n$ . Ainsi, pour chaque atome de carbone d'un ose, il y a une molécule d'eau, ce qui justifie cette appellation d'hydrate de carbone.

**1.2** Pour l' $\alpha$ -D-glucopyranose l'équilibre conformationnel s'écrit



Conformation la plus stable

L'équilibre conformationnel de la forme  $\beta$  est



Conformation la plus stable

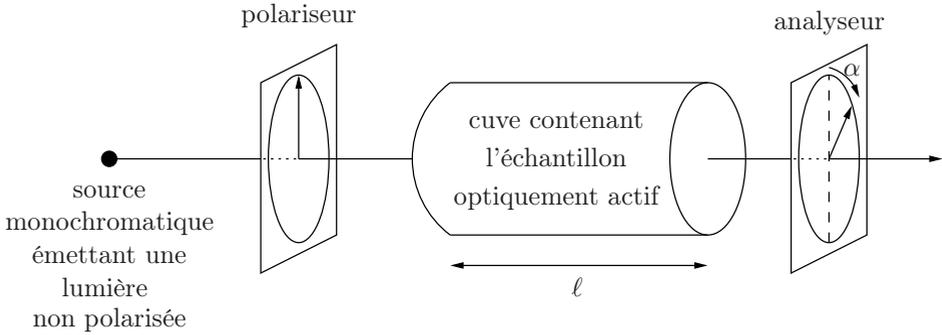
Pour chacun des deux diastéréoisomères, la conformation chaise la plus stable est celle où un maximum de groupements hydroxyle sont en position équatoriale, minimisant la gêne stérique avec les groupements axiaux. De plus, l'**isomère**  $\beta$ , qui possède le groupement hydroxyle de l'hémiacétal en position équatoriale, est **plus stable** que l'**isomère**  $\alpha$  où ce même groupement est en position axiale.

**1.3** La loi de Biot s'écrit

$$\alpha = [\alpha]_D^{25} \ell c$$

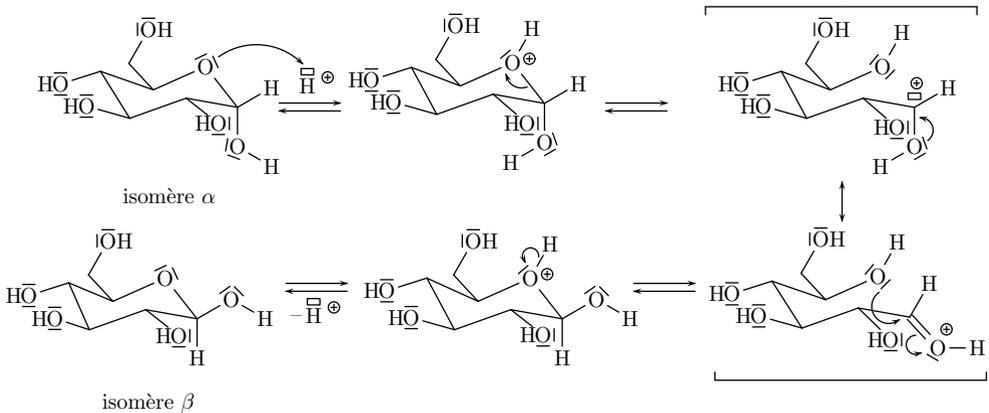
où  $\alpha$  représente l'angle de déviation (en degrés) du plan de polarisation de la lumière en sortie de la cuve par rapport à celui de l'onde incidente rectilignement polarisée,  $\ell$  la longueur de la cuve d'analyse (en dm),  $c$  la concentration du composé optiquement actif (en  $\text{g}\cdot\text{mL}^{-1}$ ) et  $[\alpha]_D^{25}$  le pouvoir rotatoire spécifique de ce composé (en  $^\circ\cdot\text{mL}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{dm}^{-1}$ ) pour la raie D du sodium et à  $25^\circ\text{C}$ .

**1.4** Pour mesurer l'activité optique d'une solution, on envoie de la lumière (en l'occurrence la longueur d'onde correspondant à la raie D du sodium) polarisée rectilignement. L'onde lumineuse traverse une cuve de longueur  $\ell$  contenant la substance optiquement active, qui dévie ce plan de polarisation. On mesure alors l'angle de déviation  $\alpha$  du plan de la lumière en sortie de l'échantillon à l'aide d'un second polariseur, appelé analyseur. L'appareillage utilisé porte le nom de polarimètre de Laurent.



Aujourd'hui les appareillages les plus puissants sont capables de sélectionner la longueur d'onde d'analyse et mesurer les pouvoirs rotatoires spécifiques à différentes longueurs d'onde. On peut alors tracer la courbe d'évolution du pouvoir rotatoire spécifique en fonction de la longueur d'onde pour caractériser le produit.

**1.5** En milieu acide, il est possible de passer de la forme  $\alpha$  à la forme  $\beta$  via la forme ouverte selon le mécanisme



Cet équilibre entre les deux formes du glucose, appelées anomères, a été étudié dès le milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, et porte également le nom de mutarotation du glucose.

**1.6** Cette réaction est une **hémiacétalisation** permettant de passer d'un hémiacétal à l'autre. Elle se déroule sous contrôle thermodynamique. Elle est équilibrée et peut être réalisée aussi bien dans le sens de formation de l'hémiacétal, que dans le sens inverse vers l'hydrolyse de ce dernier. La régénération du carbonyle et des alcools s'effectue dans les mêmes conditions que la formation de l'acétal. La réaction est donc **renversible**.

**1.7** Pour chaque expérience, on a à l'instant initial

$$\alpha_0(\alpha) = [\alpha]_{D,\alpha}^{25} \ell c_0 \quad \text{et} \quad \alpha_0(\beta) = [\alpha]_{D,\beta}^{25} \ell c_0$$

En définissant  $x$  comme la proportion d'isomère  $\alpha$  dans le milieu, on obtient pour les concentrations

$$c_\alpha = x c_0 \quad \text{et} \quad c_\beta = (1 - x) c_0$$